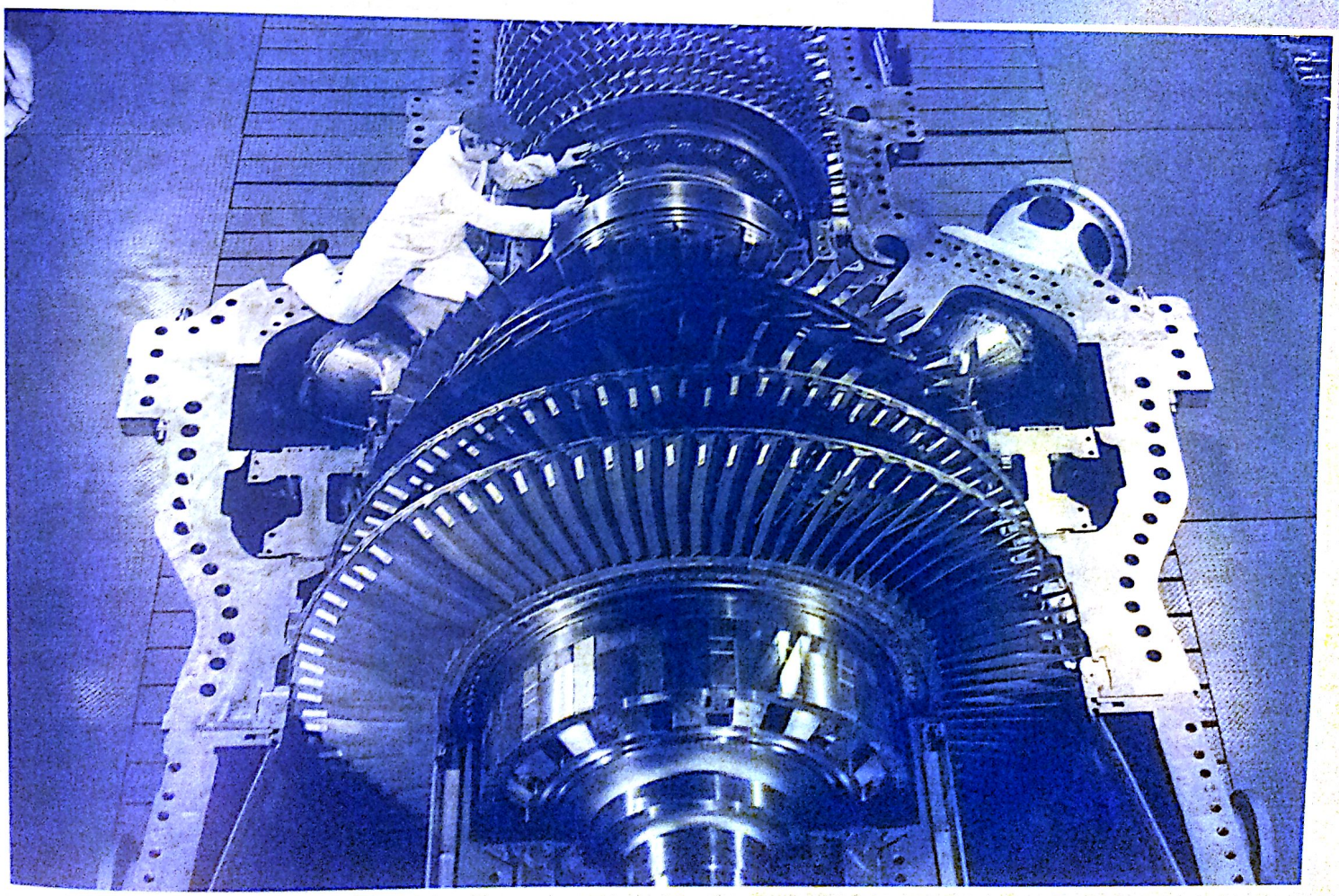
CAPÍTULO

Torsión

3



Este capítulo se dedica al estudio de la torsión y de los esfuerzos y deformaciones que causa. En el motor de jet que se muestra en la fotografía, el eje central conecta los componentes del motor para desarrollar el empuje que impulsa al avión.

3.1 INTRODUCCIÓN

En los dos capítulos anteriores se estudió cómo calcular los esfuerzos y las deformaciones en elementos estructurales sometidos a cargas axiales, es decir, a fuerzas dirigidas a lo largo del eje del elemento. En este capítulo se analizarán los elementos estructurales y partes de maquinaria que se encuentran en *torsión*. Más específicamente, se estudiarán los esfuerzos y las deformaciones en elementos de sección transversal circular sometidos a pares de torsión, o *momentos torsores*, **T** y **T′** (figura 3.1). Estos pares tienen una magnitud igual a T y sentidos opuestos. Son cantidades vectoriales que pueden representarse mediante flechas curvas, como en la figura 3.1*a*, o por vectores de par como en la figura 3.1*b*.

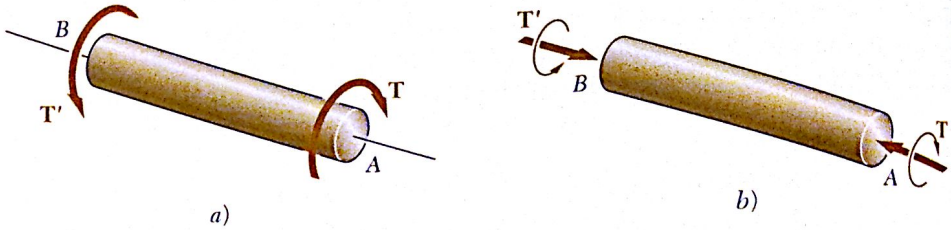


Figura 3.1

Los elementos sometidos a torsión se encuentran en muchas situaciones de ingeniería. La aplicación más común la representan los *ejes de transmisión*, que se emplean para transmitir potencia de un punto a otro. Por ejemplo, el eje mostrado en la figura 3.2 se utiliza para transmitir potencia del motor a las ruedas traseras de un automóvil. Estos ejes pueden ser sólidos, como el que se muestra en la figura 3.1, o huecos.

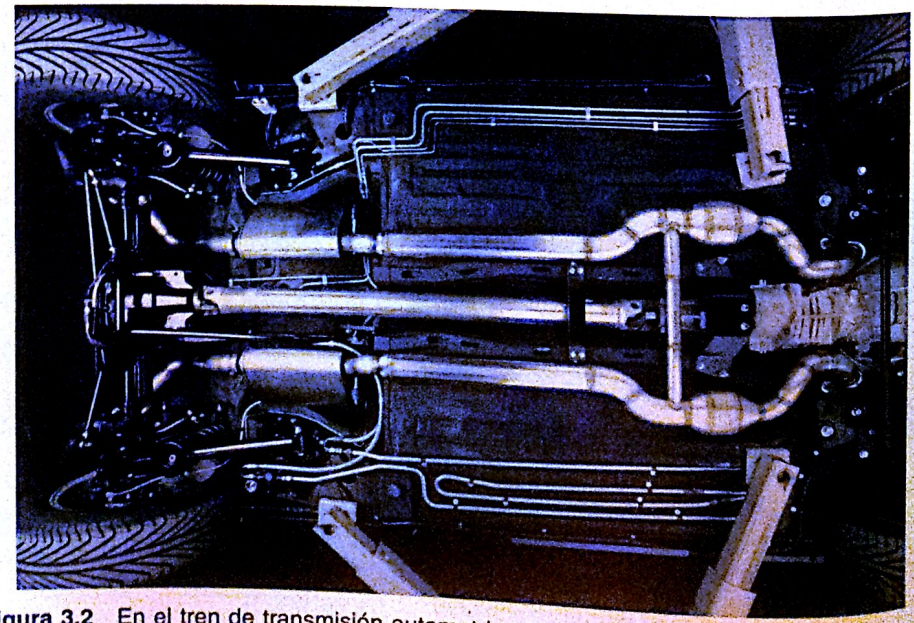


Figura 3.2 En el tren de transmisión automotriz que se muestra, el eje transmite potencia desde el motor hasta las ruedas traseras.

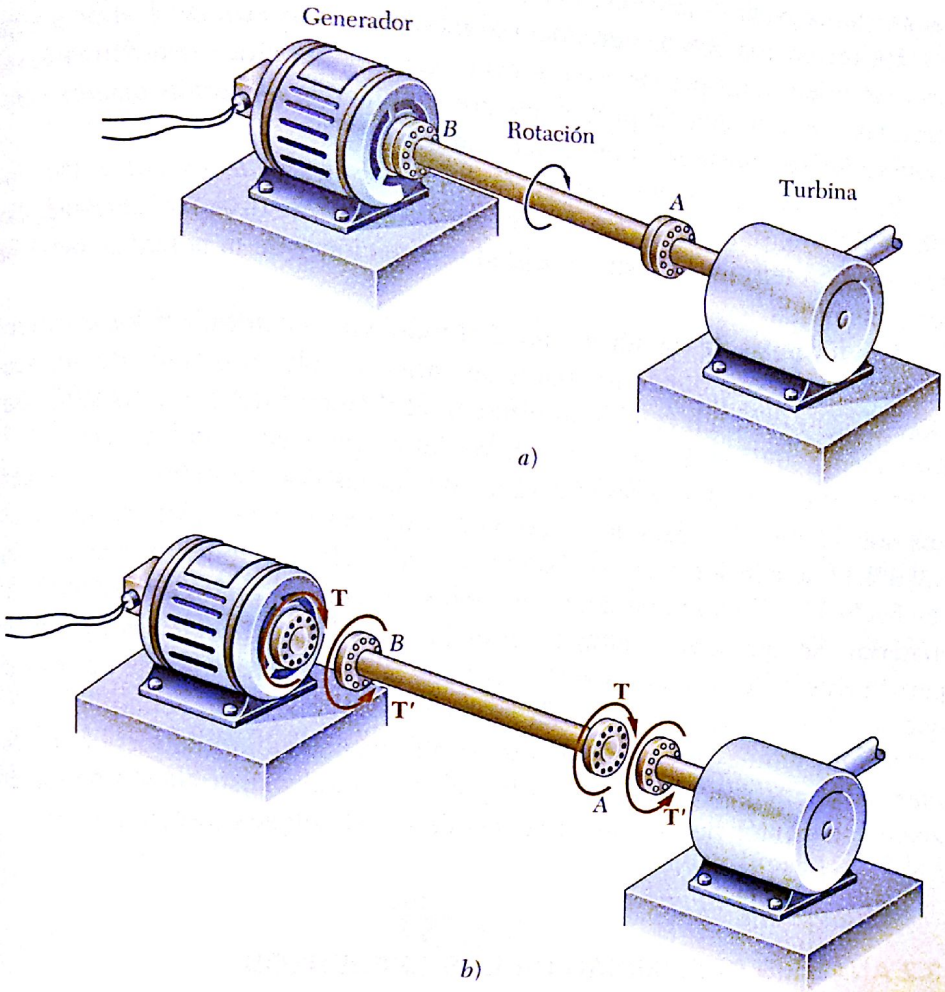


Figura 3.3

Considere el sistema que se presenta en la figura 3.3*a*, que consiste en una turbina de vapor *A* y un generador *B* conectados por un eje de transmisión *AB*. Separando el sistema en sus tres partes componentes (figura 3.3*b*), puede verse que la turbina ejerce un par de torsión o momento torsor **T** sobre el eje y que el eje ejerce un par igual sobre el generador. El generador reacciona ejerciendo un par de torsión igual y opuesto **T′** sobre el eje, y el eje ejerce la torsión **T′** sobre la turbina.

Primero se analizarán los esfuerzos y las deformaciones que ocurren en ejes circulares. En la sección 3.3 se demostrará una propiedad importante de los ejes circulares: *cuando un eje circular se somete a torsión, todas las secciones transversales permanecen planas y sin distorsión.* En otras palabras, mientras que las diversas secciones transversales a lo largo del eje giran a través de distintos ángulos, cada sección transversal gira como una placa sólida rígida. Esta propiedad permitirá determinar la *distribución de los esfuerzos cortantes sobre un eje circular y obtener en conclusión que la deformación a cortante varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha.*

Considerando las deformaciones en el *rango elástico* y utilizando la ley de Hooke para el esfuerzo cortante y la deformación a cortante, se determinará la *distribución de esfuerzos cortantes* en un eje circular y se deducirán las *fórmulas para la torsión elástica* (véase sección 3.4).

En la sección 3.5 se aprenderá a encontrar el *ángulo de giro* de un eje circular sujeto a un par de torsión dado, suponiendo otra vez deformaciones elásticas. La solución de problemas que involucran *ejes estáticamente indeterminados* se considerará en la sección 3.6.

En la sección 3.7 se estudiará el *diseño de ejes de transmisión*. Para lograr el diseño, se aprenderá a determinar las características físicas requeridas de un eje en términos de su velocidad de rotación y de la potencia que debe ser transmitida.

Las fórmulas de torsión no pueden usarse para determinar los esfuerzos cerca de secciones donde los pares de carga se aplican o cerca de una sección donde ocurre un cambio abrupto en el diámetro del eje. Más aún, estas fórmulas se aplican únicamente dentro del rango elástico del material.

En la sección 3.8 se aprenderá a calcular las concentraciones de esfuerzos donde ocurre un cambio abrupto en el diámetro del eje. En las secciones 3.9 a 3.11 se considerarán los esfuerzos y las deformaciones en ejes circulares hechos de un material dúctil cuando se excede el punto de cedencia del material. Se aprenderá, entonces, a determinar las *deformaciones plásticas* permanentes y los *esfuerzos residuales* que permanecen en un eje después de que se le ha cargado más allá del punto de cedencia del material.

En las últimas secciones de este capítulo se estudiará la torsión de elementos no circulares (sección 3.12) y se analizará la distribución de esfuerzos en elementos huecos no circulares de pared delgada (sección 3.13).

3.2 ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS ESFUERZOS EN UN EJE

Considerando un eje AB sometido en A y en B a pares de torsión $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ iguales y opuestos, se efectúa un corte perpendicular al eje de la flecha en algún punto arbitrario C (figura 3.4). El diagrama de cuerpo libre de la porción BC del eje debe incluir las fuerzas cortantes elementales $d\mathbf{F}$, perpendiculares al radio del eje, que la porción AC ejerce sobre BC al torcerse el eje (figura

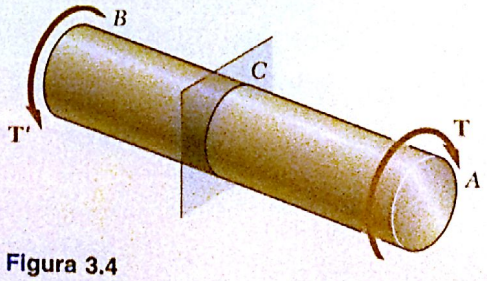


Figura 3.4

3.5*a*). Pero las condiciones de equilibrio para *BC* requieren que el sistema de estas fuerzas elementales sea equivalente a un par de torsión interno **T**, igual y opuesto a **T′** (figura 3.5*b*). Denotando con ρ la distancia perpendicular desde la fuerza $d\mathbf{F}$ al eje de la flecha, y expresando que la suma de momentos de las fuerzas cortantes $d\mathbf{F}$ alrededor del eje es igual en magnitud al par **T**, se escribe

$$\int \rho \, dF = T$$

o, ya que $dF = \tau \, dA$, donde τ es el esfuerzo cortante en el elemento de área dA,

$$\int \rho(\tau \, dA) = T \tag{3.1}$$

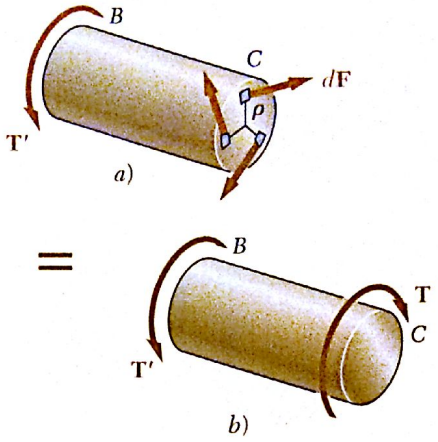


Figura 3.5

A pesar de que la relación obtenida expresa una condición importante que deben satisfacer los esfuerzos cortantes en cualquier sección transversal del eje, *no* indica cómo están distribuidos estos esfuerzos en la sección transversal. Debe observarse, por lo tanto, como ya se hizo en la sección 1.5, que la distribución real de esfuerzos bajo una carga dada es *estáticamente indeterminada*, es decir, que esta distribución *no puede determinarse por los métodos de la estática*. Sin embargo, habiendo supuesto en la sección 1.5 que los esfuerzos normales producidos por una carga axial centrada estaban distribuidos uniformemente, se encontró después (véase sección 2.17) que esta suposición estaba justificada, excepto en la cercanía de cargas concentradas. Una suposición similar con respecto a la distribución de esfuerzos cortantes

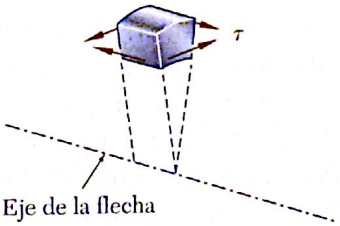


Figura 3.6

en un eje elástico *estaría equivocada*. Debe evitarse cualquier juicio con respecto a la distribución de esfuerzos en un eje hasta que se hayan analizado las *deformaciones* que se producen en el mismo. Esto se efectuará en la siguiente sección.

Debe hacerse una observación más en este punto. Como se indicó en la sección 1.12, el cortante no puede tener lugar únicamente en un plano. Considere el pequeño elemento de eje mostrado en la figura 3.6. Se sabe que el par de torsión aplicado al eje produce esfuerzos cortantes τ en las caras perpendiculares al eje de la flecha. Pero las condiciones de equilibrio estudiadas en la sección 1.12 requieren de la existencia de esfuerzos iguales en las caras formadas por los dos planos que contienen al eje de la flecha. Puede demostrarse que tales esfuerzos cortantes ocurren en realidad en la torsión

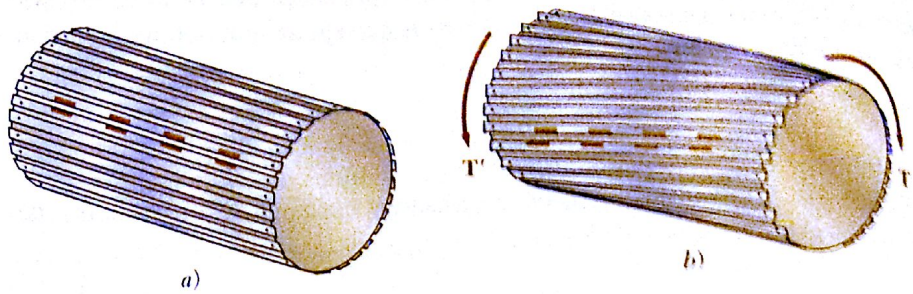


Figura 3.7

considerando un "eje" elaborado de duelas separadas sujetas con pasadores en ambos extremos a discos, como se muestra en la figura 3.7*a*. Si se pintan marcas en dos duelas adyacentes, se observa que las duelas se deslizan una con respecto a la otra cuando se aplican pares iguales y opuestos a los extremos del "eje" (figura 3.7*b*). Aunque no ocurrirá deslizamiento en un eje de un material homogéneo y cohesivo, la tendencia al deslizamiento existirá, lo cual muestra que ocurren esfuerzos en planos longitudinales así como en los planos perpendiculares al eje de la flecha.†

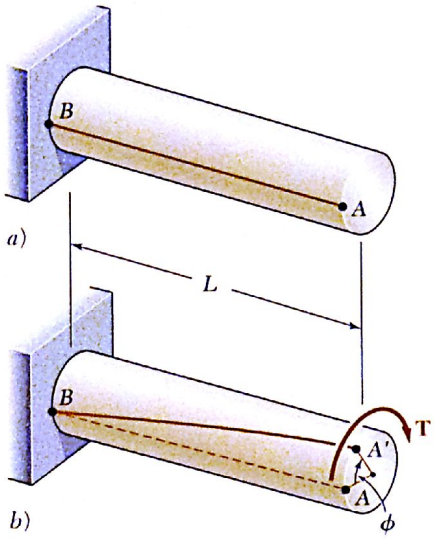


Figura 3.8

3.3 DEFORMACIONES EN UN EJE CIRCULAR

Considere un eje circular unido a un soporte fijo en uno de sus extremos (figura 3.8*a*). Si se aplica un par de torsión **T** al otro extremo, el eje se torcerá al girar su extremo libre a través de un ángulo ϕ llamado *ángulo de giro* (figura 3.8*b*). Esto significa que, dentro de un cierto rango de valores de T, el ángulo de giro ϕ es proporcional a T. También muestra que ϕ es proporcional a la longitud L del eje. En otras palabras, el ángulo de giro para un eje del mismo material y con la misma sección transversal, pero del doble de longitud, se duplicará bajo el mismo par de torsión **T**. Un propósito de este análisis será encontrar la relación específica que existe entre ϕ, L y T; otro propósito será determinar la distribución de esfuerzos cortantes en el eje, que no fue posible obtener sólo con base en la estática en la sección precedente.

En este punto, debe señalarse una propiedad importante de los ejes circulares: cuando un eje circular se somete a torsión, *todas sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión*. Dicho de otra manera, aunque las distintas secciones transversales a lo largo del eje giran diferentes cantidades, cada sección transversal gira como una placa sólida rígida. Esto se ilustra en la figura 3.9*a*, que muestra las deformaciones en un modelo de caucho sometido a torsión. La propiedad que se analiza en este momento es característica de ejes circulares, sólidos o huecos. Y no la comparten los elementos con sección transversal no circular. Por ejemplo, cuando una barra con sección transversal cuadrada se sujeta a torsión, sus distintas secciones transversales se tuercen y no permanecen planas (figura 3.9*b*).

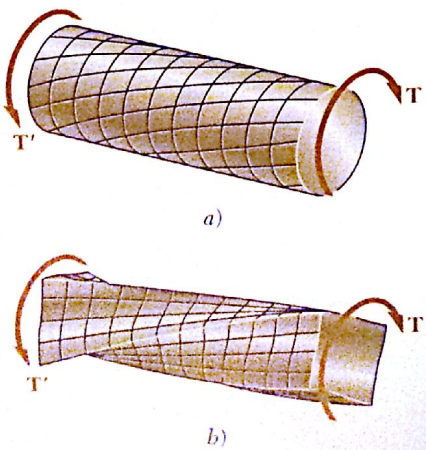


Figura 3.9

† La torcedura de un tubo de cartón que se ha ranurado a lo largo es otra demostración de la existencia de esfuerzos cortantes en los planos longitudinales.

Las secciones transversales de un eje circular permanecen planas y sin distorsión debido a que un eje circular es *axisimétrico*, es decir, su apariencia es la misma cuando se ve desde una posición fija y se gira alrededor de su eje por un ángulo arbitrario. (Las barras cuadradas, por otro lado, conservan la misma apariencia sólo si se les gira 90° o 180°.) Como se verá a continuación, la simetría axial de los ejes circulares puede emplearse para probar teóricamente que sus secciones transversales permanecen planas y sin distorsión.

Considere los puntos C y D localizados en la circunferencia de una sección transversal del eje, y sean C' y D' las posiciones que ocupan después de que el eje ha sido torcido (figura 3.10*a*). La simetría axial del eje y de la carga requiere que la rotación que hubiera causado que D llegara a C ahora debe llevar a que D' llegue a C'. Por lo tanto C' y D' deben estar en la circunferencia de un círculo, y el arco $C'D'$ debe ser igual al arco CD (véase figura 3.10*b*). Ahora se examinará si el círculo donde se encuentran C' y D' es diferente del círculo original. Suponga que C' y D' sí están en un círculo diferente y que el círculo nuevo está a la izquierda del círculo original, como se muestra en la figura 3.10*b*. La misma situación prevalecerá para cualquier otra sección transversal, ya que todas las secciones transversales del eje están sometidas al mismo par de torsión interno T; de esta manera un observador que vea al eje desde su extremo A concluirá que la carga provoca que cualquier círculo dado dibujado sobre el eje se *aleje*. Por el contrario, para un observador localizado en B, para quien la carga dada se ve igual (un par en sentido horario en primer plano y un par en sentido antihorario al fondo) llegará a la conclusión opuesta, es decir, que el círculo se mueve *hacia* él. Esta contradicción prueba que la suposición era equivocada y que C' y D' se encuentran en el mismo círculo que C y que D. Por lo tanto, al ser torcido el eje, el círculo original sólo gira sobre su propio plano. Ya que el mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier círculo concéntrico más pequeño localizado en la sección transversal bajo consideración, se concluye que toda la sección transversal permanece plana (figura 3.11).

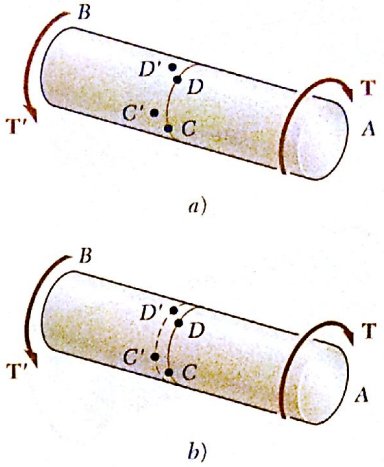


Figura 3.10

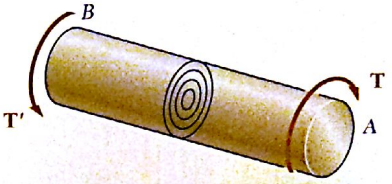


Figura 3.11

El anterior argumento no excluye la posibilidad de que los distintos círculos concéntricos de la figura 3.11 giren en cantidades diferentes cuando se tuerce el eje. Pero si ése fuera el caso, un diámetro dado de la sección transversal sería distorsionado en una curva que se vería como se muestra en la figura 3.12*a*. Un observador que viera esta curva desde A concluiría que las capas externas del eje se tuercen más que las internas, mientras que un observador colocado en B concluirá lo contrario (figura 3.12*b*). Esta inconsistencia permite concluir que cualquier diámetro de una sección transversal dada permanece recto (figura 3.12*c*) y, por lo tanto, que cualquier sección transversal dada de un eje circular permanece plana y sin distorsión.

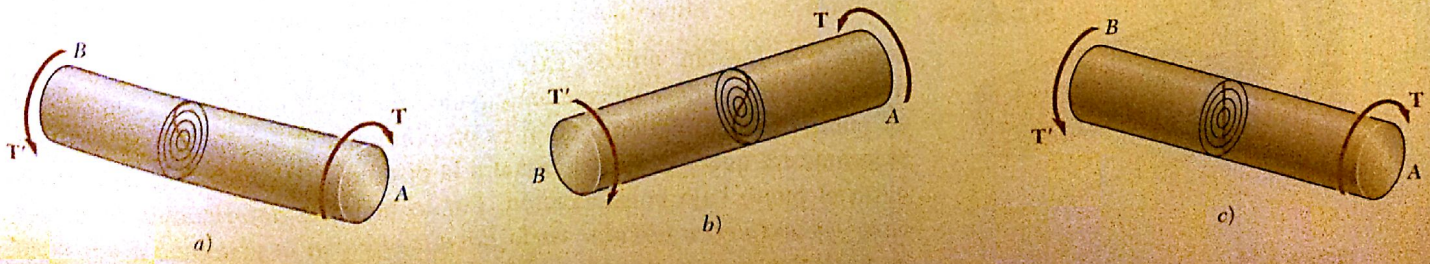


Figura 3.12

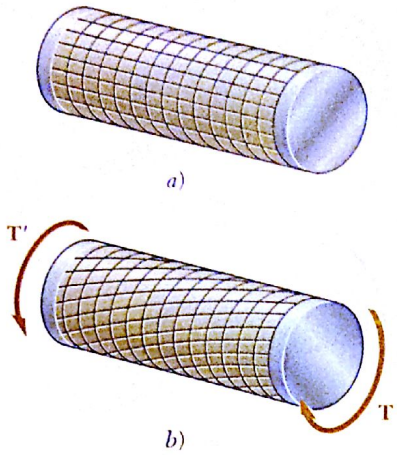


Figura 3.13

Este análisis hasta ahora ha ignorado el modo de aplicación de los pares torsores **T** y **T'**. Si *todas* las secciones del eje, desde un extremo hasta el otro, deben permanecer planas y sin distorsión, es necesario asegurarse de que los pares se aplican de tal manera que los extremos mismos del eje permanezcan planos y sin distorsión. Esto puede lograrse aplicando los pares **T** y **T'** a placas rígidas, que se encuentren sólidamente unidas a los extremos del eje (figura 3.13*a*). Sólo así puede estarse seguro de que todas las secciones permanecerán planas y sin distorsión cuando la carga se aplique, y que las deformaciones resultantes ocurrirán de manera uniforme a lo largo de todo el eje. Todos los círculos igualmente espaciados, que se muestran en la figura 3.13*a*, girarán en la misma cantidad en relación con sus vecinos, y cada una de las líneas rectas se convertirá en una curva (hélice) que interseca los distintos círculos con el mismo ángulo (figura 3.13*b*).

Las deducciones dadas en esta sección y en las siguientes se basarán en la suposición de placas rígidas en los extremos. Las condiciones de carga encontradas en la práctica pueden diferir de manera considerable de las correspondientes al modelo de la figura 3.13. El mérito principal de este modelo es que ayuda a definir un problema de torsión para el que puede obtenerse una solución exacta, de la misma manera que el modelo con placas rígidas en los extremos de la sección 2.17 hizo posible que se definiera un problema de carga axial que pudiera resolverse con facilidad y exactitud. Gracias al principio de Saint-Venant, los resultados obtenidos para el modelo idealizado pueden extenderse a la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería. Sin embargo, deben mantenerse en la mente estos resultados asociados con el modelo específico que se muestra en la figura 3.13.

Ahora se determinará la distribución de las *deformaciones a cortante* en un eje circular de longitud L y radio c que ha sido girado en un ángulo ϕ (figura 3.14*a*). Desprendiendo del eje un cilindro de radio ρ, considere el pequeño cuadrado formado por dos círculos adyacentes y dos líneas rectas adyacentes trazadas en la superficie del cilindro antes de que se aplique carga alguna (figura 3.14*b*). Al someterse el eje a una carga de torsión, el elemento se deforma para convertirse en un rombo (figura 3.14*c*). Ahora, recuerde que en la sección 2.14 se vio que la deformación unitaria cortante γ en un elemento dado se mide por el cambio en los ángulos formados por los lados de dicho elemento. Ya que los círculos que definen dos de los lados del elemento considerado aquí permanecen sin cambio, la deformación en corte γ debe ser igual al ángulo entre las líneas AB y $A'B$. (Recuerde que γ debe expresarse en radianes.)

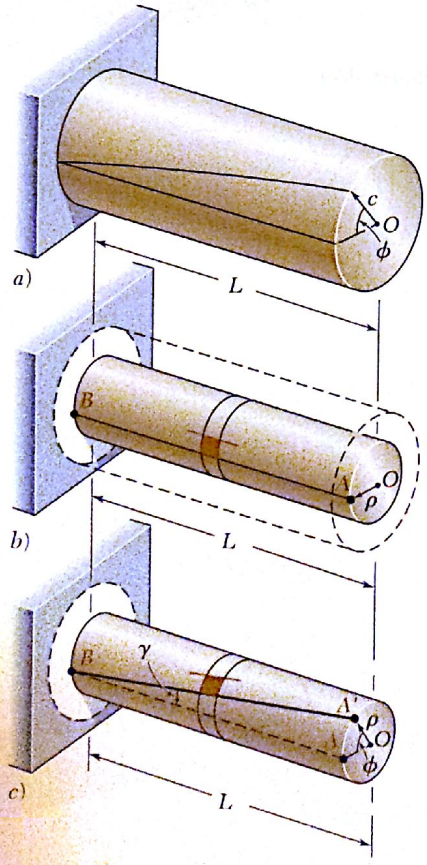


Figura 3.14

En la figura 3.14*c* se observa que, para valores pequeños de γ, puede expresarse la longitud de arco AA' como $AA' = L\gamma$. Pero, por otra parte, se tiene que $AA' = \rho\phi$. Se deduce que $L\gamma = \rho\phi$, o

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

donde γ y ϕ están, ambos, expresados en radianes. La ecuación obtenida muestra, como podría haberse anticipado, que la deformación a cortante γ en un punto dado del eje en torsión es proporcional al ángulo de giro ϕ. También muestra que γ es proporcional a la distancia ρ desde el eje de la flecha hasta el punto bajo consideración. Por lo tanto, la *deformación unitaria a corte en una flecha circular varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha.*

Se deduce de la ecuación (3.2) que la deformación a cortante es máxima en la superficie del eje, donde $\rho = c$. Se tiene que

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Eliminando ϕ de las ecuaciones (3.2) y (3.3), puede expresarse la deformación a cortante γ a una distancia ρ del eje de la flecha como

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.4}$$

3.4 ESFUERZOS EN EL RANGO ELÁSTICO

Hasta el momento ninguna relación esfuerzo-deformación en particular se ha supuesto para el análisis de ejes circulares en torsión. Considere ahora el caso en que el par de torsión **T** es tal que todos los esfuerzos cortantes en el eje se encuentran por debajo de la resistencia a la cedencia τ_Y. Se sabe, por el capítulo 2, que esto significa que los esfuerzos en el eje permanecerán por debajo del límite de proporcionalidad y también por debajo del límite elástico. Por lo tanto, se aplicará la ley de Hooke y no habrá deformación permanente.

Aplicando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación a cortante de la sección 2.14, se escribe

$$\tau = G\gamma \tag{3.5}$$

donde G es el módulo de rigidez o módulo de corte del material. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.4) por G, se escribe

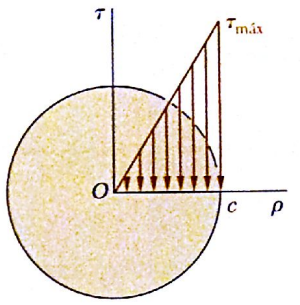
$$G\gamma = \frac{\rho}{c}G\gamma_{\text{máx}}$$

o, utilizando la ecuación (3.5),

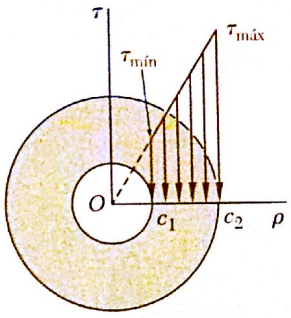
$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\text{máx}} \tag{3.6}$$

La ecuación obtenida muestra que, mientras la resistencia a la cedencia (o el límite de proporcionalidad) no sea excedida en ninguna parte de una flecha circular, *el esfuerzo cortante en la flecha varía linealmente con la distancia ρ desde el eje de la flecha*. La figura 3.15*a* muestra la distribución de esfuerzos en un eje circular de radio c, y la figura 3.15*b* la muestra en un eje circular hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2. De la ecuación (3.6) se encuentra que, en el segundo caso,

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{\text{máx}} \tag{3.7}$$



a)



b)

Figura 3.15

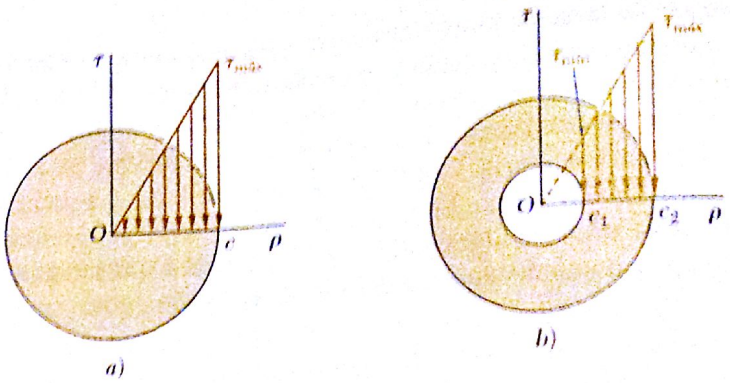


Figura 3.15 (repetida)

Recuerde ahora que en la sección 3.2 se vio que la suma de los momentos de las fuerzas elementales ejercidas sobre cualquier sección transversal del eje debe ser igual a la magnitud T del par ejercido sobre el eje:

$$\int \rho(\tau\, dA) = T \tag{3.1}$$

Sustituyendo τ de la ecuación (3.6) en la ecuación (3.1), se escribe

$$T = \int \rho\tau\, dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c}\int \rho^2\, dA$$

La integral en el último miembro representa el momento polar de inercia J de la sección transversal con respecto a su centro O. Se tiene entonces que

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} \tag{3.8}$$

o, despejando para $\tau_{\text{máx}}$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

Sustituyendo $\tau_{\text{máx}}$ de la ecuación (3.9) en la ecuación (3.6), se expresa el momento cortante a cualquier distancia ρ del eje de la flecha como

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3.10}$$

Las ecuaciones (3.9) y (3.10) se conocen como las *fórmulas de torsión elástica*. Recuerde de la estática que el momento polar de inercia de un círculo de radio c es $J = \frac{1}{2}\pi c^4$. En el caso de un eje circular hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2, el momento polar de inercia es

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c_2^4 - \tfrac{1}{2}\pi c_1^4 = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) \tag{3.11}$$

Note que, si se emplean unidades métricas del SI en la ecuación (3.9) o en la (3.10), T se expresará en N · m, c o ρ en metros y J en m^4; se verifica que el esfuerzo cortante resultante se exprese en N/m^2, es decir, en pascales (Pa). Si se emplean las unidades acostumbradas en Estados Unidos, T deberá expresarse en lb · in., c o ρ en in., y J en $in.^4$, con el esfuerzo cortante resultante expresado en psi.

EJEMPLO 3.01

Un eje cilíndrico hueco de acero mide 1.5 m de longitud y tiene diámetros interior y exterior iguales a 40 y 60 mm, respectivamente (figura 3.16). *a)* ¿Cuál es el máximo par de torsión que puede aplicarse al eje si el esfuerzo cortante no debe exceder 120 MPa? *b)* ¿Cuál es el valor mínimo correspondiente del esfuerzo cortante en el eje?

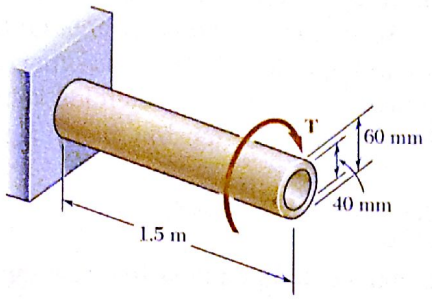


Figura 3.16

a) Máximo par de torsión permisible. El máximo par permisible **T** que puede aplicarse al eje es el par para el que $\tau_{máx} = 120$ MPa. Como este valor es menor que la resistencia de cedencia del acero, se puede usar la ecuación (3.9). Despejando T de esta ecuación, se tiene

$$T = \frac{J\tau_{máx}}{c} \tag{3.12}$$

Recuerde que el momento polar de inercia J de la sección transversal es dado por la ecuación (3.11), donde $c_1 = \frac{1}{2}(40 \text{ mm}) = 0.02$ m y $c_2 = \frac{1}{2}(60 \text{ mm}) = 0.03$ m, y se escribe

$$J = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Sustituyendo J y $\tau_{máx}$ en la ecuación (3.12) y haciendo $c = c_2 = 0.03$ m, se tiene

$$T = \frac{J\tau_{máx}}{c} = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.03 \text{ m}}$$

$$= 4.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

b) Esfuerzo mínimo de corte. El valor mínimo del esfuerzo cortante ocurre en la superficie interior del eje. Se obtiene de la ecuación (3.7), que expresa que $\tau_{mín}$ y $\tau_{máx}$ son respectivamente proporcionales a c_1 y c_2:

$$\tau_{mín} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{máx} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.03 \text{ m}}(120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$

Las fórmulas de torsión (3.9) y (3.10) se dedujeron para un eje con sección transversal circular uniforme sometido a pares torsores en sus extremos. Sin embargo, también pueden utilizarse para un eje con sección transversal variable o para un eje sujeto a pares de torsión en lugares distintos de sus extremos (figura 3.17*a*). La distribución de los esfuerzos cortantes en una sección transversal S dada del eje se obtiene de la ecuación (3.9), donde J denota el momento polar de inercia de esa sección, y donde T representa el *par de torsión interno* en esa sección. El valor de T se obtiene dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción de eje localizada de un lado del corte (figura 3.17*b*) y escribiendo que la suma de los pares aplicados a esta porción, incluyendo el par interno **T**, es cero (véase problema modelo 3.1).

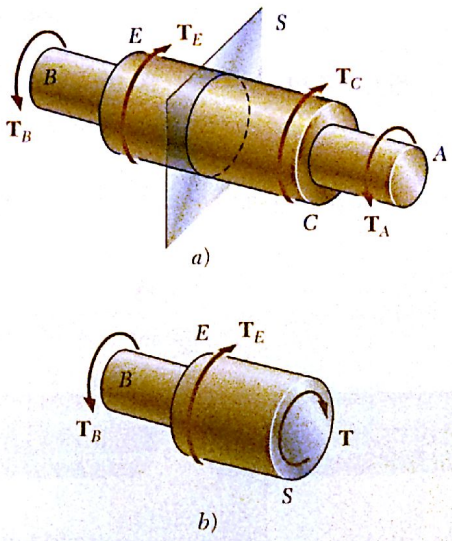


Figura 3.17

Hasta este punto, el análisis de esfuerzos en un eje se ha limitado a los esfuerzos cortantes. Esto se debe a que el elemento que se seleccionó estaba orientado de tal manera que sus caras eran paralelas o bien, perpendiculares al eje de la flecha (figura 3.6). De análisis anteriores (véanse secciones 1.11 y 1.12) se sabe que los esfuerzos normales, los esfuerzos cortantes o una combinación de ambos pueden encontrarse bajo la misma condición de carga, dependiendo de la orientación del elemento elegido. Considere los dos elementos *a* y *b* localizados en la superficie de un eje circular sometido a torsión (figura 3.18). Como las caras del elemento *a* son respectivamente para-

Figura 3.18

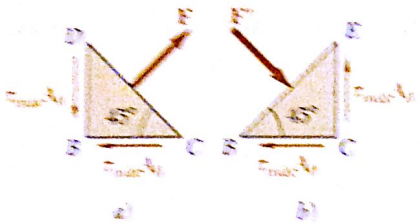


Figura 3.19

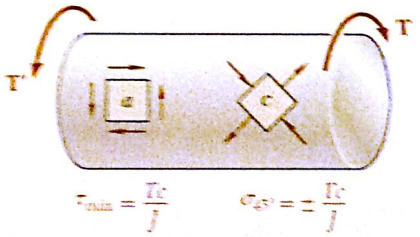


Figura 3.20

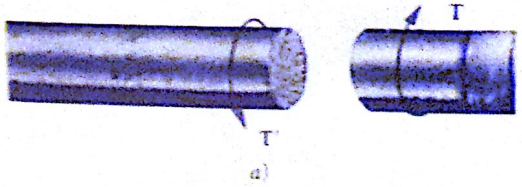


Figura 3.21

lelas y perpendiculares al eje de la flecha, los únicos esfuerzos en el elemento serán los esfuerzos de corte definidos por la fórmula (3.9), específicamente $\tau_{máx} = Tc/J$. Por otro lado, las caras del elemento *b*, que forman ángulos arbitrarios con el eje de la flecha, estarán sujetas a una combinación de esfuerzos normales y cortantes.

Considere el caso particular de un elemento *c* (que no se muestra) a 45° al eje de la flecha. Para determinar los esfuerzos en las caras de este elemento, se consideran los dos elementos triangulares mostrados en la figura 3.19 y se dibujan sus diagramas de cuerpo libre. En el caso del elemento de la figura 3.19*a*, se sabe que los esfuerzos ejercidos en las caras *BC* y *BD* son los esfuerzos cortantes $\tau_{máx} = Tc/J$. La magnitud de las fuerzas cortantes correspondientes es, por lo tanto, $\tau_{máx}A_0$, donde A_0 denota el área de la cara. Observando que las componentes a lo largo de *DC* de las dos fuerzas cortantes son iguales y opuestas, se concluye que la fuerza **F** ejercida sobre *DC* debe ser perpendicular a esa cara. Es una fuerza de tensión, y su magnitud es

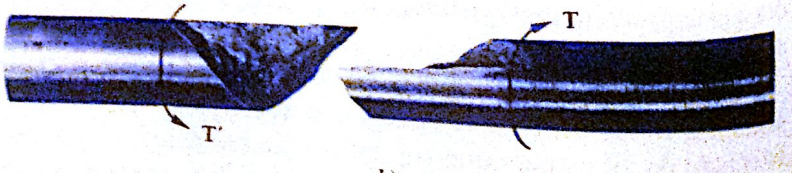
$$F = 2(\tau_{máx}A_0)\cos 45° = \tau_{máx}A_0\sqrt{2} \tag{3.13}$$

El esfuerzo correspondiente se obtiene dividiendo la fuerza *F* entre el área *A* de la cara *DC*. Observando que $A = A_0\sqrt{2}$, se escribe

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{máx}A_0\sqrt{2}}{A_0\sqrt{2}} = \tau_{máx} \tag{3.14}$$

Un análisis similar del elemento de la figura 3.19*b* muestra que el esfuerzo sobre la cara *BE* es $\sigma = -\tau_{máx}$. Se concluye que los esfuerzos ejercidos sobre las caras de un elemento *c* a 45° al eje de la flecha (figura 3.20) son esfuerzos normales iguales a $\pm\tau_{máx}$. Así, mientras que el elemento *a* en la figura 3.20 está en cortante puro, el elemento *c* en la misma figura está sometido a esfuerzos de tensión en dos de sus caras, y a un esfuerzo de compresión en las otras dos. También se advierte que todos los esfuerzos involucrados tienen la misma magnitud, *Tc*/*J*.†

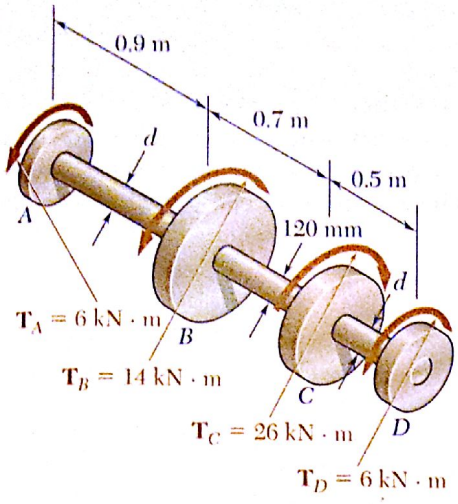
Como se vio en la sección 2.3, los materiales dúctiles generalmente fallan a cortante. Por lo tanto, cuando está sujeta a torsión, una probeta *J* hecha de un material dúctil se rompe a lo largo de un plano perpendicular a su eje longitudinal (figura 3.21*a*). Por otro lado, los materiales frágiles son más débiles a tensión que a corte. Por ello, cuando se somete a torsión, una probeta de un material frágil tiende a fracturarse a lo largo de superficies perpendiculares a la dirección en que la tensión es máxima, esto es, a lo largo de superficies que forman un ángulo de 45° con el eje del espécimen (figura 3.21*b*).



b)

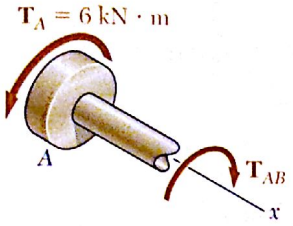
† Los esfuerzos en elementos con orientación arbitraria, como el elemento *b* de la figura 3.18, se estudiarán en el capítulo 7.

PROBLEMA MODELO 3.1



El eje *BC* es hueco y tiene diámetros interior y exterior de 90 mm y 120 mm, respectivamente. Los ejes *AB* y *CD* son sólidos y de diámetro *d*. Para la carga mostrada en la figura, determine *a*) los esfuerzos cortantes máximo y mínimo en el eje *BC*, *b*) el diámetro *d* requerido en los ejes *AB* y *CD* si los esfuerzos cortantes permisibles en estos ejes son de 65 MPa.

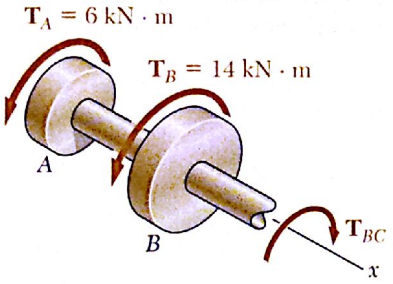
SOLUCIÓN



Ecuaciones de estática. Denotando con $\mathbf{T}_{AB}$ el par de torsión en el eje *AB*, se hace un corte en el eje *AB* y, para el cuerpo libre mostrado, se escribe

$$\Sigma M_x = 0: \qquad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ahora se corta en el eje *BC* y, para el cuerpo libre mostrado en la figura, se tiene

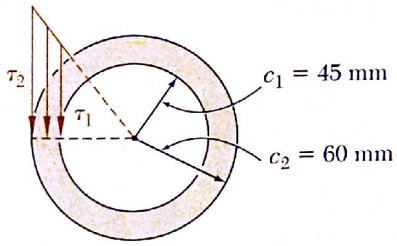


$$\Sigma M_x = 0: \qquad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

***a*) Eje *BC*.** Para este eje hueco se tiene

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

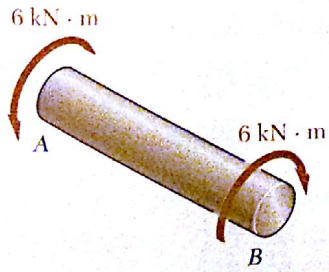
Esfuerzo cortante máximo. En la superficie externa, se tiene



$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \qquad \tau_{\text{máx}} = 86.2 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Esfuerzo cortante mínimo. Se sabe que los esfuerzos son proporcionales a la distancia del eje de la flecha.

$$\frac{\tau_{\text{mín}}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \frac{\tau_{\text{mín}}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \qquad \tau_{\text{mín}} = 64.7 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

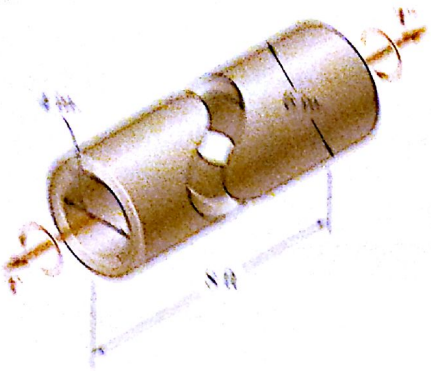


***b*) Ejes *AB* y *CD*.** Se advierte que en ambos ejes la magnitud del par de torsión es $T = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ y $\tau_{\text{perm}} = 65$ MPa. Denotando con *c* el radio de los ejes, se escribe

$$\tau = \frac{Tc}{J} \qquad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN} \cdot \text{m})c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

$$c^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \qquad c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

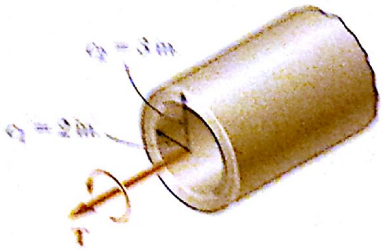
$$d = 2c = 2(38.9 \text{ mm}) \qquad d = 77.8 \text{ mm} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 3.2

El diseño preliminar de un eje grande que conecta a un motor con un generador requiere el uso de un eje hueco con diámetros interior y exterior de 4 in. y 6 in., respectivamente. Sabiendo que el esfuerzo cortante permisible es de 12 ksi, determine el máximo par que puede ser transmitido *a*) por el eje como fue diseñado, *b*) por un eje sólido del mismo peso, *c*) por un eje hueco del mismo peso y de 8 in. de diámetro exterior.

SOLUCIÓN



a) El eje hueco como fue diseñado. Para el eje hueco se tiene que

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(3\text{ in.})^4 - (2\text{ in.})^4] = 102.1\text{ in.}^4$$

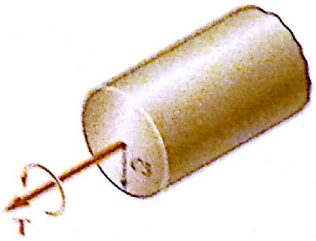
Utilizando la ecuación (3.9) se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} \qquad 12\text{ ksi} = \frac{T(3\text{ in.})}{102.1\text{ in.}^4} \qquad T = 408\text{ kip} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

b) Eje sólido de igual peso. Para que el eje como se diseñó y este eje sólido tengan el mismo peso y longitud, las áreas de sus secciones transversales deben ser iguales.

$$A_{(a)} = A_{(b)}$$

$$\pi[(3\text{ in.})^2 - (2\text{ in.})^2] = \pi c_3^2 \qquad c_3 = 2.24\text{ in.}$$



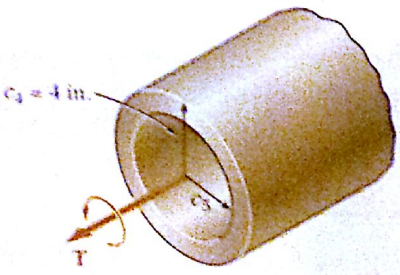
Ya que $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi, se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_3}{J} \qquad 12\text{ ksi} = \frac{T(2.24\text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(2.24\text{ in.})^4} \qquad T = 211\text{ kip} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

c) Eje hueco con 8 in. de diámetro. Para un peso igual, nuevamente deben ser iguales las áreas de las secciones transversales. Se determina el diámetro interior del eje a partir de

$$A_{(a)} = A_{(c)}$$

$$\pi[(3\text{ in.})^2 - (2\text{ in.})^2] = \pi[(4\text{ in.})^2 - c_5^2] \qquad c_5 = 3.317\text{ in.}$$



Para $c_5 = 3.317$ in. y $c_4 = 4$ in.,

$$J = \frac{\pi}{2}[(4\text{ in.})^4 - (3.317\text{ in.})^4] = 212\text{ in.}^4$$

Con $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi y $c_4 = 4$ in.,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_4}{J} \qquad 12\text{ ksi} = \frac{T(4\text{ in.})}{212\text{ in.}^4} \qquad T = 636\text{ kip} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.1 Para el eje cilíndrico que se muestra en la figura, determine el máximo esfuerzo cortante causado por un par de torsión con magnitud $T = 1.5$ kN · m.

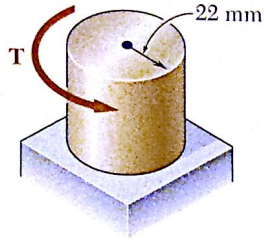


Figura P3.1 y P3.2

3.2 Determine el par de torsión **T** que causa un esfuerzo cortante máximo de 80 MPa en el eje cilíndrico de acero que se muestra en la figura.

3.3 Si se sabe que el diámetro interior del eje hueco mostrado es $d = 0.9$ in., determine el esfuerzo cortante máximo causado por un par de torsión de magnitud $T = 9$ kip · in.

3.4 Si se sabe que $d = 1.2$ in., determine el par de torsión **T** que causa un esfuerzo cortante máximo de 7.5 ksi en el eje hueco que se muestra en la figura.

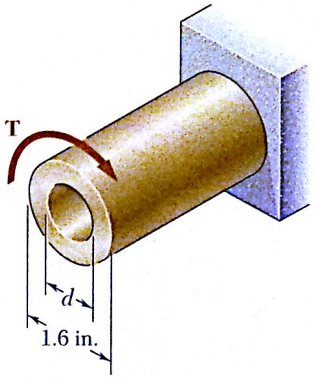


Figura P3.3 y *P3.4*

3.5 *a*) Determine el par de torsión que puede aplicarse a un eje sólido de 20 mm de diámetro sin exceder un esfuerzo cortante permisible de 80 MPa. *b*) Resuelva el inciso *a*) con el supuesto de que al eje sólido se le reemplaza con un eje hueco con la misma área de sección transversal y con un diámetro interior igual a la mitad de su propio diámetro exterior.

3.6 Un par de torsión $T = 3$ kN · m se aplica al cilindro de bronce sólido mostrado en la figura. Determine *a*) el máximo esfuerzo cortante, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *D* que yace sobre un círculo de 15 mm de radio dibujado en el extremo del cilindro, *c*) el porcentaje del par de torsión soportado por la porción del cilindro dentro del radio de 15 mm.

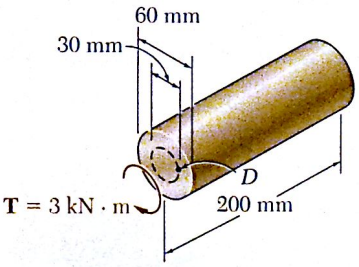


Figura P3.6

3.7 El vástago sólido *AB* está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de latón y tiene un esfuerzo cortante permisible de 7 ksi. Determine *a*) el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse en *A* si no debe excederse el esfuerzo cortante permisible en la manga *CD*, *b*) el valor requerido correspondiente del diámetro d_s en el vástago *AB*.

3.8 El vástago sólido *AB* tiene un diámetro $d_s = 1.5$ in. y está hecho de un acero con un esfuerzo cortante permisible de 12 ksi, mientras que la manga *CD* está hecha de latón y tiene un esfuerzo cortante permisible de 7 ksi. Determine el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse en *A*.

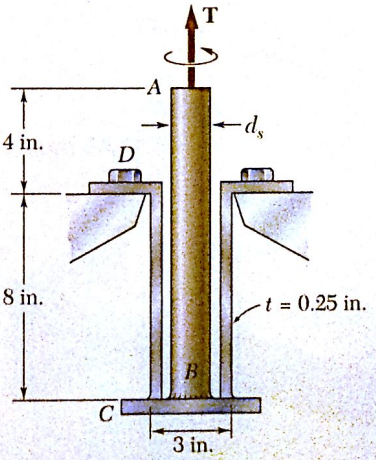


Figura *P3.7* y P3.8

3.9 Los pares de torsión mostrados se ejercen sobre las poleas *A* y *B*. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *BC*.

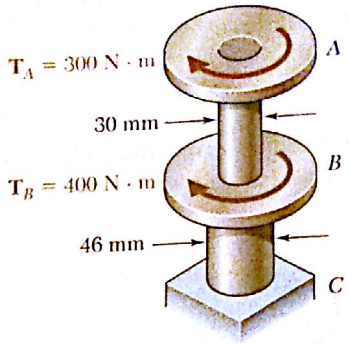


Figura P3.9

3.10 Para reducir la masa total del ensamble del problema 3.9, se ha considerado un nuevo diseño en el que el diámetro del eje *BC* será menor. Determine el mínimo diámetro del eje *BC* para el que el máximo valor del esfuerzo cortante en el ensamble no aumentará.

3.11 Bajo condiciones normales de operación, el motor eléctrico ejerce un par de torsión de 2.8 kN · m en el eje *AB*. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el máximo esfuerzo cortante *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *BC*, *c*) en el eje *CD*.

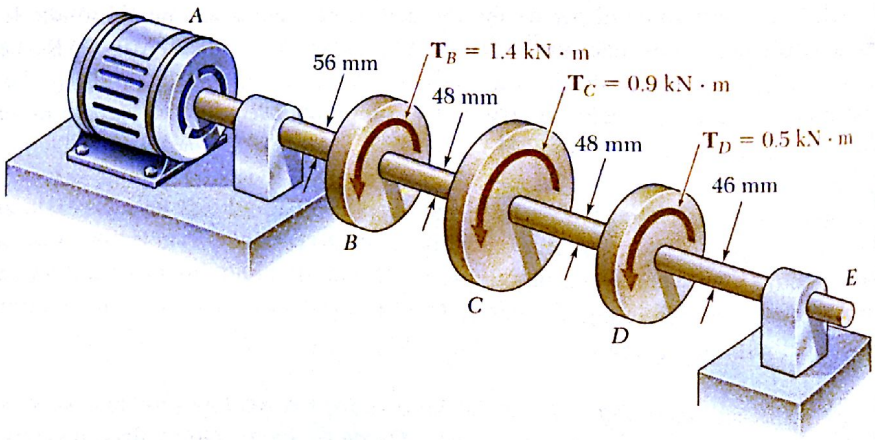


Figura P3.11

3.12 Para reducir la masa total del ensamble del problema 3.11, se ha considerado un nuevo diseño en el que el diámetro del eje *BC* será menor. Determine el mínimo diámetro del eje *BC* para el que el máximo valor del esfuerzo cortante en el ensamble no aumentará.

3.13 Los pares de torsión mostrados en la figura se ejercen sobre las poleas *A*, *B* y *C*. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *BC*.

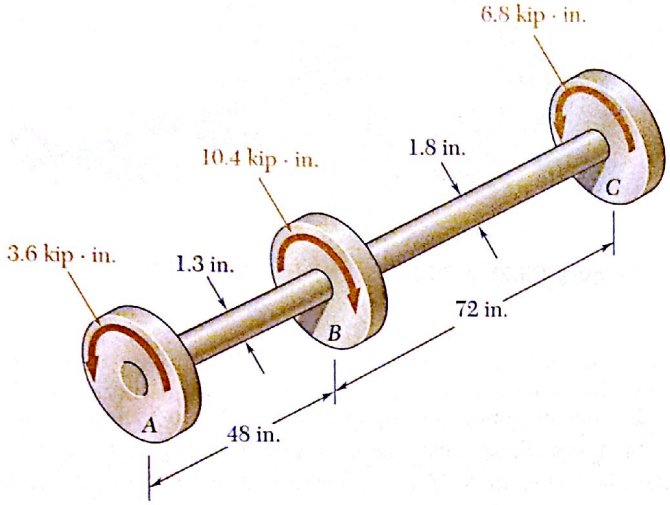


Figura P3.13 y P3.14

3.14 Los ejes del ensamble de poleas que se muestran en la figura serán rediseñados. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en cada eje es de 8.5 ksi, determine el diámetro mínimo permisible para *a*) el eje *AB*, *b*) el eje *BC*.

3.15 El esfuerzo cortante permisible es de 15 ksi en la varilla de acero *AB* y de 8 ksi en la varilla de latón *BC*. Si se sabe que un par de torsión de magnitud $T = 10$ kip · in. se aplica en *A*, determine el diámetro requerido de *a*) la varilla *AB*, *b*) la varilla *BC*.

3.16 El esfuerzo cortante permisible es de 15 ksi en la varilla de acero *AB* de 1.5 in. de diámetro y de 8 ksi en la varilla de latón *BC* de 1.8 in. de diámetro. Si se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine el máximo par de torsión que puede aplicarse en *A*.

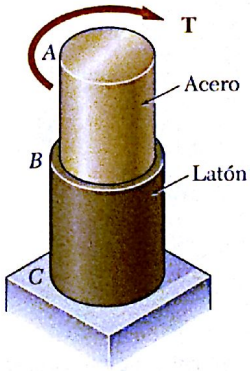


Figura P3.15 y P3.16

3.17 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un latón para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 55 MPa. Si se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine los diámetros mínimos d_{AB} y d_{BC} con los cuales no se excede el esfuerzo cortante permisible.

3.18 Resuelva el problema 3.17, pero suponga que se invierte la dirección de $\mathbf{T}_C$.

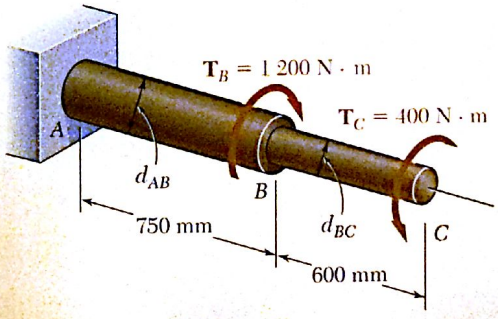


Figura *P3.17*

3.19 El esfuerzo permisible es de 50 MPa en la varilla de latón *AB* y de 25 MPa en la varilla de aluminio *BC*. Si se sabe que en *A* se aplica un par de torsión con magnitud $T = 125$ N · m, determine el diámetro requerido de *a*) la varilla *AB*, *b*) la varilla *BC*.

3.20 La varilla *sólida BC* tiene un diámetro de 30 mm y está hecha de un aluminio para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 25 MPa. La varilla *AB* es *hueca* y tiene un diámetro exterior de 25 mm; está hecha de un latón para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa. Determine *a*) el máximo diámetro interior de la varilla *AB* para el cual el factor de seguridad es el mismo para cada varilla, *b*) el máximo par de torsión que puede aplicarse en *A*.

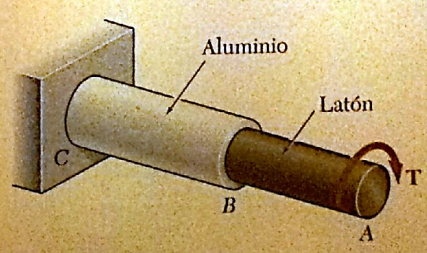


Figura P3.19 y P3.20

3.21 Un par de torsión de magnitud $T = 8$ kip · in. se aplica en D como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 7.5 ksi en cada eje, determine el diámetro requerido *a*) del eje AB, *b*) del eje CD.

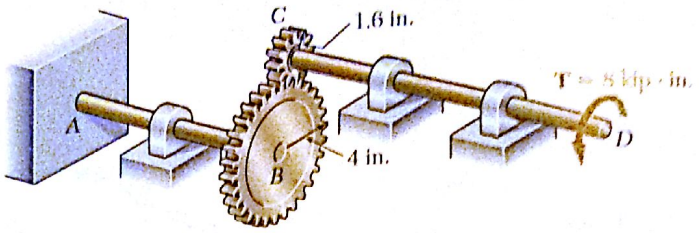


Figura P3.21 y *P3.22*

3.22 Un par de torsión de magnitud $T = 8$ kip · in. se aplica en D como se muestra en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje AB es de 2.25 in. y que el diámetro del eje CD es de 1.75 in., determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje AB, *b*) en el eje CD.

3.23 Dos ejes sólidos de acero están conectados por los engranes que se muestran en la figura. Se aplica un par de torsión de magnitud $T = 900$ N · m al eje AB. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa y se consideran sólo los esfuerzos debidos al giro, determine el diámetro requerido para *a*) el eje AB, *b*) el eje CD.

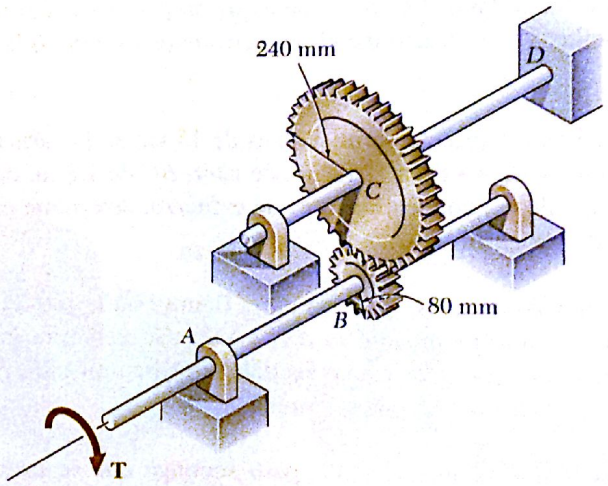


Figura P3.23 y P3.24

3.24 El eje CD consiste en una varilla de 66 mm de diámetro y está conectado al eje AB de 48 mm de diámetro como se muestra en la figura. Si se consideran sólo los esfuerzos debidos al giro y se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa para cada eje, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse.

3.25 Los dos ejes sólidos están conectados por engranes, como se muestra en la figura, y están hechos de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 7 000 psi. Si se sabe que los diámetros de los dos ejes son, respectivamente, $d_{BC} = 1.6$ in. y $d_{EF} = 1.25$ in. determine el máximo par de torsión $\mathbf{T}_C$ que puede aplicarse en C.

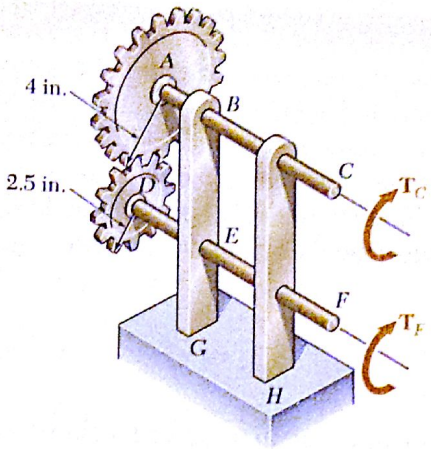


Figura *P3.25* y P3.26

3.26 Los dos ejes sólidos están conectados por engranes, como se muestra en la figura, y están hechos de un acero para el que el esfuerzo cortante permisible es de 8 500 psi. Si se sabe que en C se aplica un par de torsión de magnitud $T_C = 5$ kip · in. y que el ensamble está en equilibrio, calcule el diámetro requerido de *a*) el eje BC, *b*) el eje EF.

3.27 Un par de torsión con magnitud $T = 120$ N · m se aplica al eje AB del tren de engranes mostrado. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en cada uno de los tres ejes sólidos es de 75 MPa, determine el diámetro requerido de *a*) el eje AB, *b*) el eje CD, *c*) el eje EF.

3.28 Un par de torsión con magnitud $T = 100$ N · m se aplica al eje AB del tren de engranes mostrado. Si se sabe que los diámetros respectivos de los tres ejes sólidos son $d_{AB} = 21$ mm, $d_{CD} = 30$ mm y $d_{EF} = 40$ mm, determine el esfuerzo cortante máximo en *a*) el eje AB, *b*) el eje CD, *c*) el eje EF.

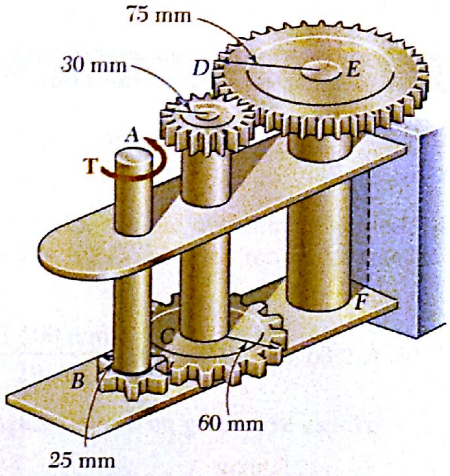


Figura P3.27 y P3.28

3.29 En tanto que la distribución exacta de los esfuerzos de corte en un eje cilíndrico hueco es como se muestra en la figura P3.29*a*, un valor aproximado puede obtenerse para $\tau_{máx}$ si los esfuerzos están distribuidos uniformemente en toda el área A de la sección transversal, como se muestra en la figura P3.29*b*, y además si todas las fuerzas elementales de corte actúan a una distancia de O igual al radio medio de la sección transversal $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Este valor aproximado es $\tau_0 = T/Ar_m$, donde T es el par de torsión aplicado. Determine la razón $\tau_{máx}/\tau_0$ del valor verdadero de máximo esfuerzo cortante y su valor aproximado τ_0 para valores de c_1/c_2, respectivamente, iguales a 1.00, 0.95, 0.75, 0.50 y 0.

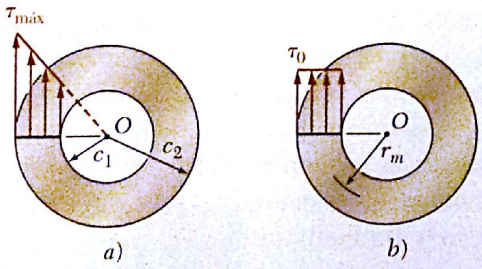


Figura P3.29

3.30 *a*) Para un esfuerzo permisible dado, encuentre la razón T/w del máximo par de torsión permisible T y del peso por unidad de longitud w para el eje hueco mostrado en la figura. *b*) Si se denota con $(T/w)_0$ el valor de esta razón calculada para un eje sólido con el mismo radio c_2, exprese la razón T/w para el eje hueco en términos de $(T/w)_0$ y de c_1/c_2.

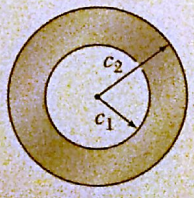


Figura P3.30

3.5 ÁNGULO DE GIRO EN EL RANGO ELÁSTICO

En esta sección se deducirá una relación entre el ángulo de giro ϕ de un eje circular y el par de torsión T ejercido sobre el eje. Se supondrá que la totalidad del eje permanece elástica. Considerando primero el caso de un eje de longitud L y sección transversal uniforme de radio c sujeto a un par de torsión T en su extremo libre (figura 3.22), se sabe de la sección 3.3 que el ángulo de giro ϕ y la deformación máxima a cortante $\gamma_{máx}$ se relacionan como sigue:

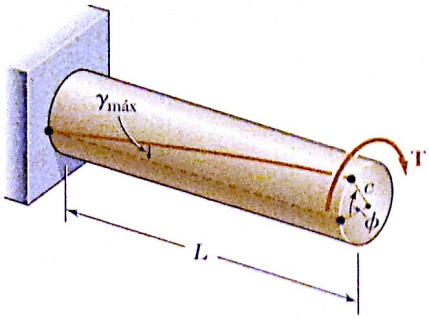


Figura 3.22

$$\gamma_{máx} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Pero, en el rango elástico, el esfuerzo de cedencia no se excede en ninguna parte del eje, se aplica la ley de Hooke y se tiene que $\gamma_{máx} = \tau_{máx}/G$ o, a partir de la ecuación (3.9),

$$\gamma_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{G} = \frac{Tc}{JG} \tag{3.15}$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (3.3) y (3.15), y despejando ϕ, se tiene que

$$\phi = \frac{TL}{JG} \tag{3.16}$$

donde ϕ se expresa en radianes. La relación obtenida muestra que, dentro del rango elástico, el *ángulo de giro ϕ es proporcional al par de torsión T aplicado al eje*. Esto está de acuerdo con la evidencia experimental citada al principio de la sección 3.3.

La ecuación (3.16) suministra un método conveniente para determinar el módulo de rigidez de un material dado. Una probeta del material, en la forma de una varilla cilíndrica de diámetro y longitud conocidos, se coloca en una *máquina de ensayo a torsión* (figura 3.23). Se aplican pares de torsión con magnitud T progresivamente mayor a la probeta, y se registran los valores correspondientes del ángulo de giro ϕ sobre una longitud L. Mientras no se exceda el esfuerzo de cedencia del material, los puntos obtenidos de graficar ϕ contra T caerán en una línea recta. La pendiente de esta línea representa la cantidad JG/L, de la que puede calcularse el módulo de rigidez G.

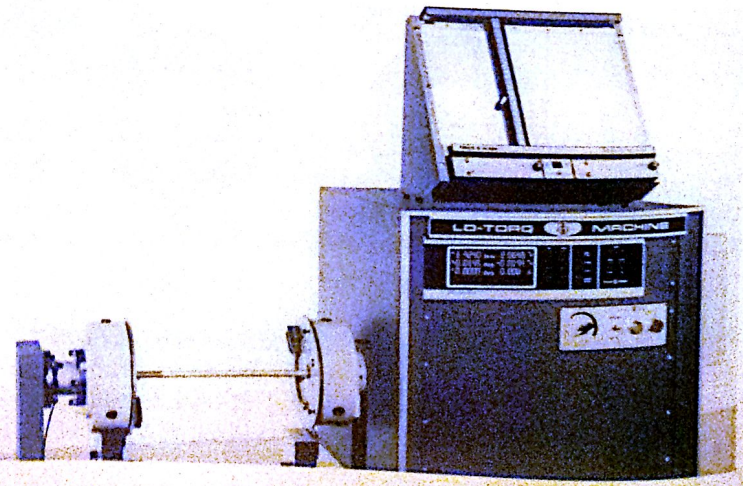


Figura 3.23 Máquina para ensayos de torsión.

EJEMPLO 3.02

¿Qué par de torsión deberá aplicarse al extremo del eje del ejemplo 3.01 para producir un giro de 2°? Utilice el valor $G = 77$ GPa para el módulo de rigidez del acero.

Despejando T de la ecuación (3.16), se escribe

$$T = \frac{JG}{L}\phi$$

Sustituyendo los valores dados

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \qquad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

y recordando del ejemplo 3.01 que, para una sección transversal dada,

$$J = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

se tiene que

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}}(34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1.829 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.829 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EJEMPLO 3.03

¿Qué ángulo de giro creará un esfuerzo cortante de 70 MPa en la superficie interior del eje hueco de acero de los ejemplos 3.01 y 3.02?

El método que primero viene a la mente para resolver este problema es utilizar la ecuación (3.10) para encontrar el par de torsión T correspondiente al valor dado de τ, y la ecuación (3.16) para determinar el ángulo de giro ϕ correspondiente al valor de T recién encontrado.

Sin embargo, puede utilizarse una solución más directa. De la ley de Hooke, primero se calcula la deformación a cortante en la superficie interna del eje:

$$\gamma_{\text{mín}} = \frac{\tau_{\text{mín}}}{G} = \frac{70 \times 10^6 \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 909 \times 10^{-6}$$

Usando la ecuación (3.2), que fue obtenida expresando la longitud del arco AA' en la figura 3.14*c* en términos tanto de γ y ϕ, se tiene que:

$$\phi = \frac{L\gamma_{\text{mín}}}{c_1} = \frac{1\,500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}}(909 \times 10^{-6}) = 68.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para obtener el ángulo de giro en grados, se escribe

$$\phi = (68.2 \times 10^{-3} \text{ rad})\left(\frac{360°}{2\pi \text{ rad}}\right) = 3.91°$$

La fórmula (3.16) para el ángulo de giro únicamente puede utilizarse si el eje es homogéneo (G constante), si tiene una sección transversal uniforme y sólo si está cargado en sus extremos. Si el eje es sometido a par de torsión en lugares distintos de los extremos, o si consta de varias porciones con secciones transversales distintas y posiblemente distintos materiales, debe dividirse en partes componentes que satisfagan individualmente las condiciones requeridas para la aplicación de la fórmula (3.16). En el caso del eje AB de la figura 3.24, por ejemplo, deben considerarse cuatro partes diferentes: AC, CD, DE y EB. El ángulo total de giro del eje, esto es, el ángulo que gira el extremo A con respecto al extremo B, se obtiene sumando *algebraicamente* los ángulos de giro de cada parte componente. Denotando respectivamente con T_i, L_i, J_i y G_i el par de torsión interno, longitud, momento polar de inercia de la sección transversal y módulo de rigidez correspondiente a la i-ésima parte, el ángulo total de giro del eje se expresa como

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{3.17}$$

El par de torsión interno T_i en cualquier parte dada del eje se obtiene haciendo un corte a través de esa parte y dibujando el diagrama de cuerpo libre de

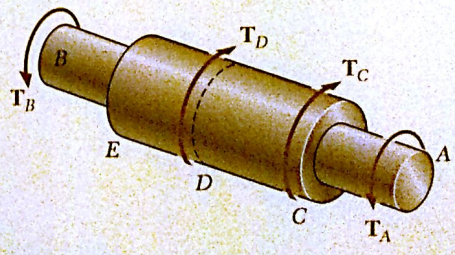


Figura 3.24

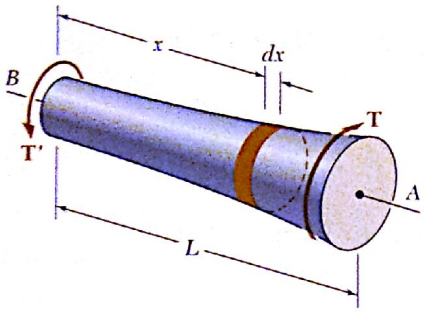


Figura 3.25

la porción del eje situada a un lado de la sección. Este procedimiento, que ya se explicó en la sección 3.4 y se ilustró en la figura 3.17, se aplica en el problema modelo 3.3.

En el caso de un eje con sección transversal circular variable, como se muestra en la figura 3.25, la fórmula (3.16) puede aplicarse a un disco con grosor dx. El ángulo por el que una cara del disco gira con respecto a la otra es, por lo tanto,

$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

donde J es una función de x que puede determinarse. Integrando en x de 0 a L, se obtiene el ángulo total de giro del eje:

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG} \tag{3.18}$$

Tanto el eje de la figura 3.22, que fue empleado para deducir la fórmula (3.16), como el eje de la figura 3.16, que fue analizado en los ejemplos 3.02 y 3.03, tenían un extremo unido a un soporte fijo. En cada caso, por lo tanto, el ángulo de giro ϕ del eje fue igual al ángulo de rotación de su extremo libre. Cuando ambos extremos de un eje giran, sin embargo, el ángulo de giro del eje es igual al ángulo a través del que un extremo del eje gira *con respecto al otro*. Considere, por ejemplo, el ensamble de la figura 3.26*a*, compuesto por dos ejes elásticos AD y BE, cada uno de longitud L, radio c y módulo de rigidez G, unidos a engranes que se juntan en C. Si un par de torsión **T** se aplica en E (figura 3.26*b*), ambos ejes se torcerán. Puesto que el extremo D del eje AD es fijo, el ángulo de giro AD se mide por el ángulo de rotación ϕ_A del extremo A. Por otra parte, ya que ambos extremos del eje BE giran, el ángulo de giro de BE es igual a la diferencia entre los ángulos de rotación ϕ_B y ϕ_E, es decir, el ángulo de giro es igual al ángulo a través del cual el extremo E gira con respecto al extremo B. Denotando este ángulo relativo de rotación $\phi_{E/B}$, se escribe

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

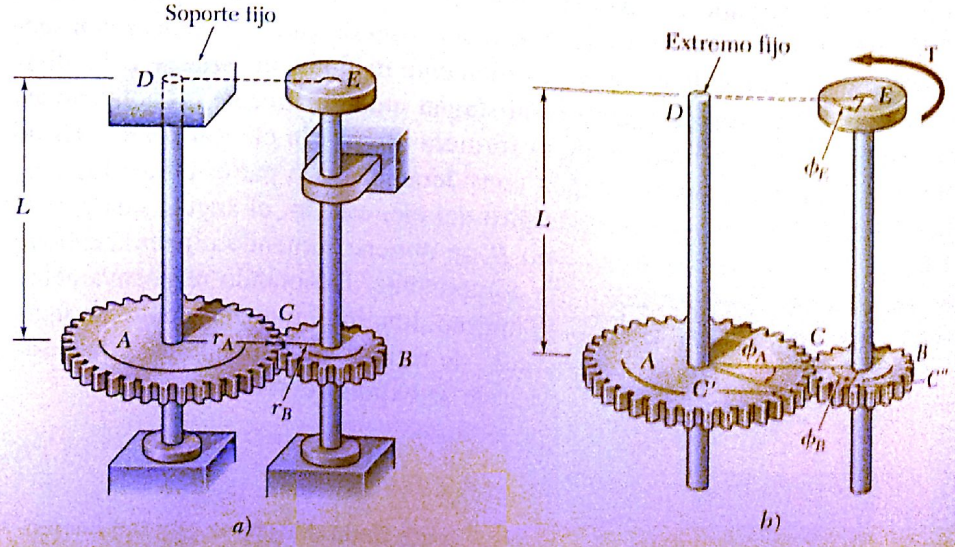


Figura 3.26

EJEMPLO 3.04

Para el ensamble de la figura 3.26, sabiendo que $r_A = 2r_B$, determine el ángulo de rotación del extremo E del eje BE cuando el par $\mathbf{T}$ se aplica a E.

Primero se determina el par $\mathbf{T}_{AD}$ ejercido sobre el eje AD. Observando que se aplican fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ sobre los dos engranes en C (figura 3.27), y recordando que $r_A = 2r_B$, se concluye que el par ejercido sobre el eje AD es el doble del ejercido en el eje BE; por lo tanto, $T_{AD} = 2T$.

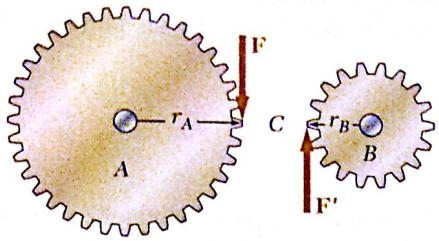


Figura 3.27

Como el extremo D del eje AD está fijo, el ángulo de rotación ϕ_A del engrane A es igual al ángulo de giro del eje y se obtiene de

$$\phi_A = \frac{T_{AD}L}{JG} = \frac{2TL}{JG}$$

Observando que los arcos CC' y CC'' de la figura 3.26*b* deben ser iguales, se escribe $r_A\phi_A = r_B\phi_B$ y se obtiene

$$\phi_B = (r_A/r_B)\phi_A = 2\phi_A$$

Se tiene, por lo tanto

$$\phi_B = 2\phi_A = \frac{4TL}{JG}$$

Considerando ahora el eje BE, recuerde que el ángulo de giro del eje es igual al ángulo $\phi_{E/B}$ a través del que el extremo E gira con respecto al extremo B. Se tiene que

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{BE}L}{JG} = \frac{TL}{JG}$$

El ángulo de rotación del extremo E se obtiene de

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{E/B}$$

$$= \frac{4TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{5TL}{JG}$$

3.6 EJES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

En la sección 3.4 se vio que para determinar los esfuerzos en un eje era necesario calcular primero los pares de torsión internos en las distintas partes del eje. Estos pares se obtuvieron por medio de estática dibujando el diagrama de cuerpo libre de la porción del eje localizada a un lado de un corte dado y escribiendo que la suma de los pares ejercidos en esa porción era cero.

Hay situaciones, sin embargo, donde los pares internos no pueden determinarse únicamente por medio de la estática. De hecho, en tales casos los pares externos mismos, es decir, los pares ejercidos sobre el eje por los apoyos y conexiones, no pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre del eje completo. Las ecuaciones de equilibrio deben complementarse con relaciones que involucren las deformaciones del eje y que se obtengan considerando la geometría del problema. Debido a que la estática no es suficiente para determinar los pares internos y externos, se dice que los ejes son *estáticamente indeterminados*. El siguiente ejemplo, así como el problema modelo 3.5, mostrará cómo analizar ejes estáticamente indeterminados.

EJEMPLO 3.05

Un eje circular AB consiste en un cilindro de acero de 10 in. de largo y $\frac{7}{8}$ in. de diámetro, en el que se ha perforado una cavidad de 5 in. de largo y $\frac{5}{8}$ in. de diámetro desde el extremo B. El eje está unido a soportes fijos en ambos extremos, y un par de 90 lb · ft se aplica a la mitad (figura 3.28). Determine el par ejercido sobre el eje por cada uno de los soportes.

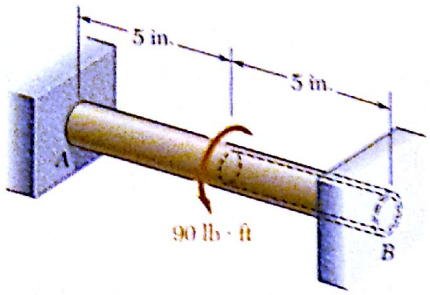


Figura 3.28

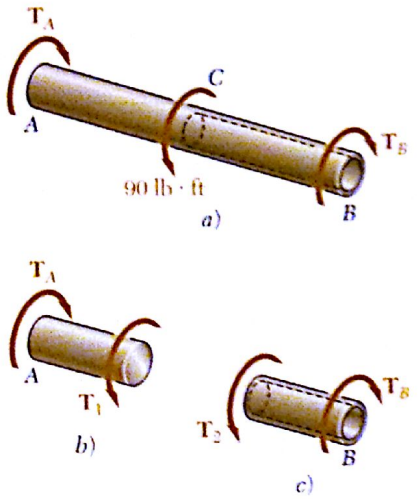


Figura 3.29

Dibujando el diagrama de cuerpo libre del eje y denotando con $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ los pares ejercidos por los soportes (figura 3.29a), se obtiene la ecuación de equilibrio

$$T_A + T_B = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Como esta ecuación no es suficiente para determinar los dos pares desconocidos $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$, el eje es estáticamente indeterminado.

Sin embargo, $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ pueden determinarse si se observa que el ángulo total de giro del eje AB debe ser cero, ya que ambos extremos se encuentran empotrados. Denotando con ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, los ángulos de giro de las porciones AC y CB, se escribe

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre de una pequeña porción del eje que incluya al extremo A (figura 3.29b), se advierte que el par interno T_1 en AC es igual a T_A, y del diagrama de cuerpo libre de una pequeña porción del eje que incluye al extremo B (figura 3.29c) puede notarse que el par interno T_2 en CB es igual a T_B. Aplicando la ecuación (3.16) y observando que las porciones AC y CB del eje están torcidas en sentidos opuestos, se escribe

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$$

Despejando T_B, se tiene que

$$T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

Sustituyendo datos numéricos

$$L_1 = L_2 = 5 \text{ in.}$$

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{7}{16} \text{ in.})^4 = 57.6 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\pi[(\tfrac{7}{16} \text{ in.})^4 - (\tfrac{5}{16} \text{ in.})^4] = 42.6 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$

se obtiene

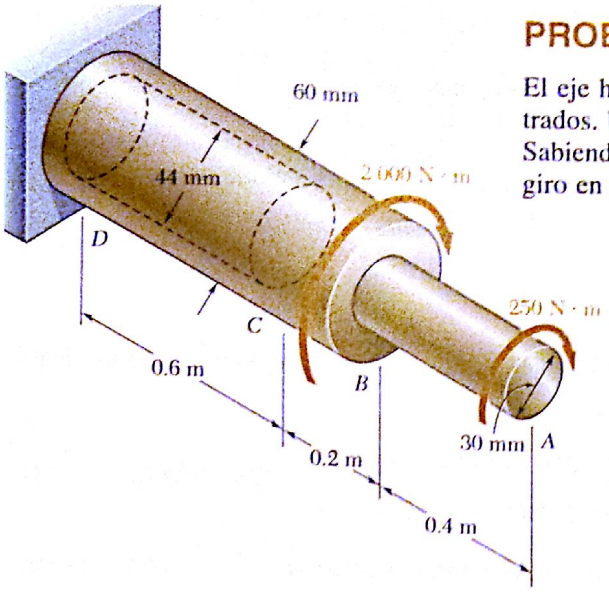
$$T_B = 0.740\, T_A$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de equilibrio original, se tiene que

$$1.740\, T_A = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$T_A = 51.7 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad T_B = 38.3 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

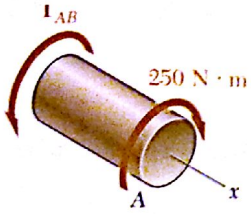
PROBLEMA MODELO 3.3



El eje horizontal AD está sujeto a una base fija en D y se le aplican los pares mostrados. Un agujero de 44 mm de diámetro se ha perforado en la porción CD del eje. Sabiendo que el eje es de un acero para el que $G = 77$ GPa, determine el ángulo de giro en el extremo A.

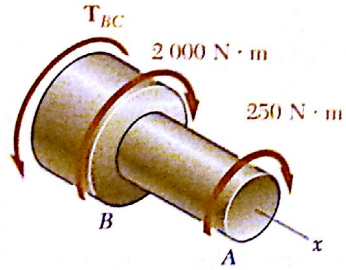
SOLUCIÓN

Debido a que el eje consta de tres porciones AB, BC y CD, cada una con sección transversal uniforme y con un par interno constante, puede utilizarse la ecuación (3.17).



Estática. Efectuando un corte en el eje entre A y B y utilizando el cuerpo libre mostrado en la figura, se encuentra

$$\Sigma M_x = 0: \qquad (250 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

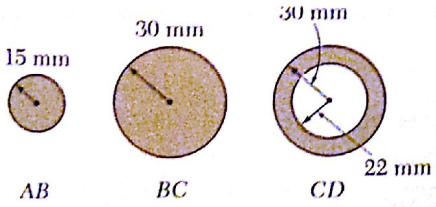


Haciendo un corte entre B y C, se tiene

$$\Sigma M_x = 0: (250 \text{ N} \cdot \text{m}) + (2\,000 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como ningún par se aplica en C,

$$T_{CD} = T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

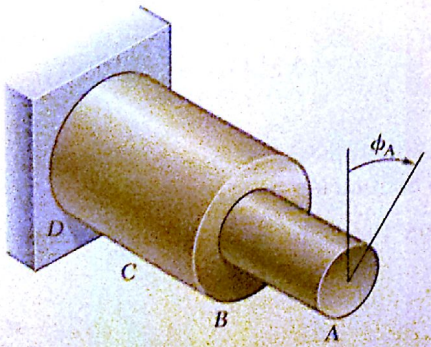


Momentos polares de inercia

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.015 \text{ m})^4 = 0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.030 \text{ m})^4 = 1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.030 \text{ m})^4 - (0.022 \text{ m})^4] = 0.904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Ángulo de giro. Usando la ecuación (3.17) y recordando que $G = 77$ GPa para todo el eje, se tiene que

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G}\left(\frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}}\right)$$

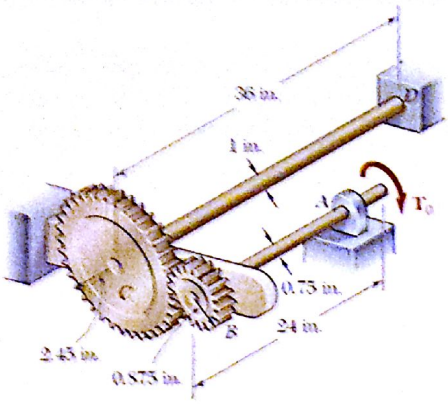
$$\phi_A = \frac{1}{77 \text{ GPa}}\left[\frac{(250 \text{ N} \cdot \text{m})(0.4 \text{ m})}{0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2\,250)(0.2)}{1.272 \times 10^{-6}} + \frac{(2\,250)(0.6)}{0.904 \times 10^{-6}}\right]$$

$$= 0.01634 + 0.00459 + 0.01939 = 0.0403 \text{ rad}$$

$$\phi_A = (0.0403 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \qquad \phi_A = 2.31^\circ \blacktriangleleft$$

PROBLEMA MODELO 3.4

Dos ejes sólidos de acero están conectados por los engranes mostrados en la figura. Sabiendo que para cada eje $G = 11.2 \times 10^6$ psi y que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi, determine *a*) el máximo par $\mathbf{T}_0$ que puede aplicarse al extremo *A* del eje *AB*, *b*) el ángulo correspondiente que rota el extremo *A* del eje *AB*.



SOLUCIÓN

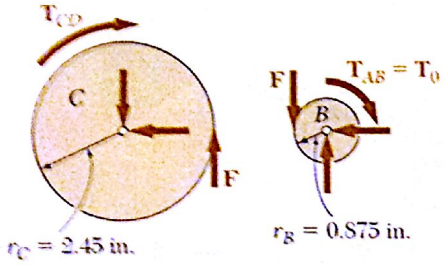
Estática. Denotando con F la magnitud de la fuerza tangencial entre los dientes de los engranes, se tiene

Engrane B. $\Sigma M_B = 0$: $F(0.875 \text{ in.}) - T_0 = 0$ $\quad T_{CD} = 2.8T_0$ (1)

Engrane C. $\Sigma M_C = 0$: $F(2.45 \text{ in.}) - T_{CD} = 0$

Cinemática. Notando que los movimientos perimetrales de los engranes son iguales, se escribe

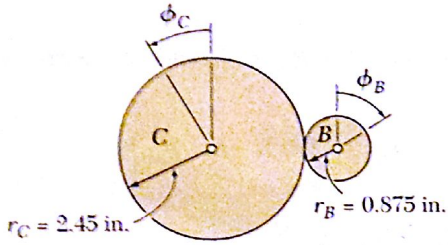
$$r_B\phi_B = r_C\phi_C \qquad \phi_B = \phi_C\frac{r_C}{r_B} = \phi_C\frac{2.45 \text{ in.}}{0.875 \text{ in.}} = 2.8\phi_C \tag{2}$$



a) **Par T_0**

Eje AB. Con $T_{AB} = T_0$ y $c = 0.375$ in., junto con el esfuerzo cortante máximo permisible de 8 000 psi, se escribe

$$\tau = \frac{T_{AB}c}{J} \qquad 8\,000 \text{ psi} = \frac{T_0(0.375 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi(0.375 \text{ in.})^4} \qquad T_0 = 663 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

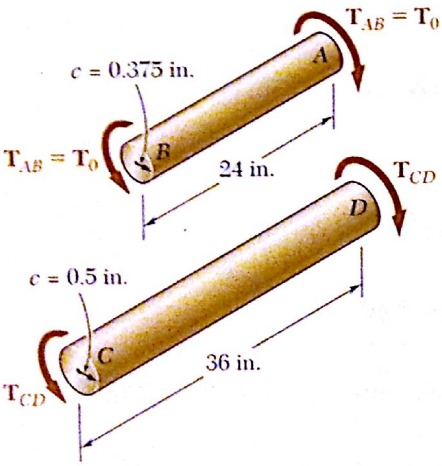


Eje CD. De (1) se tiene que $T_{CD} = 2.8T_0$. Con $c = 0.5$ in. y $\tau_{\text{perm}} = 8\,000$ psi, se escribe

$$\tau = \frac{T_{CD}c}{J} \qquad 8\,000 \text{ psi} = \frac{2.8T_0(0.5 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi(0.5 \text{ in.})^4} \qquad T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Par máximo permisible. Se elige el mínimo valor obtenido para T_0

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$



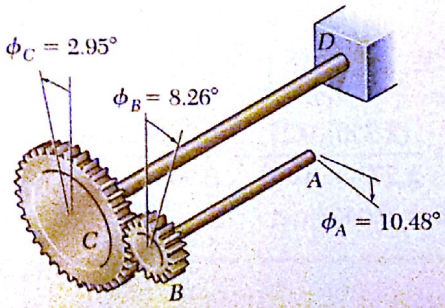
b) **Ángulo de rotación en el extremo *A*.** Primero se calcula el ángulo de giro para cada eje.

Eje AB. Para $T_{AB} = T_0 = 561$ lb · in., se tiene que

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{JG} = \frac{(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(24 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi(0.375 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.0387 \text{ rad} = 2.22°$$

Eje CD. $T_{CD} = 2.8T_0 = 2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})$

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{JG} = \frac{2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(36 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi(0.5 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.514 \text{ rad} = 2.95°$$

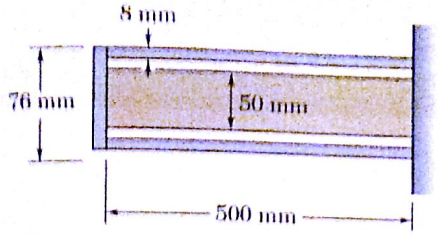


Ya que el extremo *D* del eje *CD* está fijo, se tiene que $\phi_C = \phi_{C/D} = 2.95°$. Usando la ecuación (2), se encuentra que el ángulo de rotación del engrane *B* es

$$\phi_B = 2.8\phi_C = 2.8(2.95°) = 8.26°$$

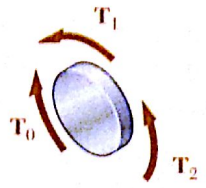
Para el extremo *A* del eje *AB*, se tiene

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 8.26° + 2.22° \qquad \phi_A = 10.48°$$



PROBLEMA MODELO 3.5

Un eje de acero y un tubo de aluminio están conectados a un soporte fijo y a un disco rígido en la sección transversal como se observa en la figura. Sabiendo que los esfuerzos iniciales son cero, determine el máximo par $\mathbf{T}_0$ que puede aplicarse al disco si los esfuerzos permisibles son 120 MPa en el eje de acero y 70 MPa en el tubo de aluminio. Use $G = 77$ GPa para el acero y $G = 27$ GPa para el aluminio.



SOLUCIÓN

Estática. *Cuerpo libre del disco.* Denotando con $\mathbf{T}_1$ el par ejercido por el tubo sobre el disco y por $\mathbf{T}_2$ el par ejercido por el eje, se encuentra que

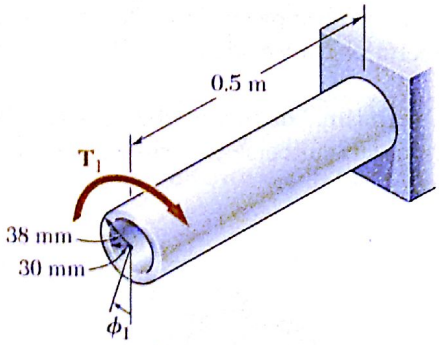
$$T_0 = T_1 + T_2 \tag{1}$$

Deformaciones. Como el tubo y el eje están conectados al disco rígido, se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2: \qquad \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1(0.5\text{ m})}{(2.003 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(27\text{ GPa})} = \frac{T_2(0.5\text{ m})}{(0.614 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(77\text{ GPa})}$$

$$T_2 = 0.874 T_1 \tag{2}$$



Aluminio
$G_1 = 27$ GPa
$J_1 = \frac{\pi}{2}[(38\text{ mm})^4 - (30\text{ mm})^4]$
$= 2.003 \times 10^{-6}\text{m}^4$

Esfuerzos cortantes. Se *supondrá* que el requerimiento $\tau_{\text{alum}} \leq 70$ MPa es crítico. Para el tubo de aluminio, se tiene

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{alum}} J_1}{c_1} = \frac{(70\text{ MPa})(2.003 \times 10^{-6}\text{ m}^4)}{0.038\text{ m}} = 3\,690\text{ N} \cdot \text{m}$$

Usando la ecuación (2), se calcula el valor correspondiente T_2 y entonces se encuentra el esfuerzo cortante máximo en el eje de acero.

$$T_2 = 0.874 T_1 = 0.874(3\,690) = 3\,225\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\text{acero}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3\,225\text{ N} \cdot \text{m})(0.025\text{ m})}{0.614 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 131.3\text{ MPa}$$

Se observa que el esfuerzo permisible de 120 MPa para el acero es excedido; la suposición hecha fue *errónea*. Por lo tanto, el par máximo $\mathbf{T}_0$ se obtendrá haciendo $\tau_{\text{acero}} = 120$ MPa. Primero se determina el par $\mathbf{T}_2$.

$$T_2 = \frac{\tau_{\text{acero}} J_2}{c_2} = \frac{(120\text{ MPa})(0.614 \times 10^{-6}\text{ m}^4)}{0.025\text{ m}} = 2\,950\text{ N} \cdot \text{m}$$

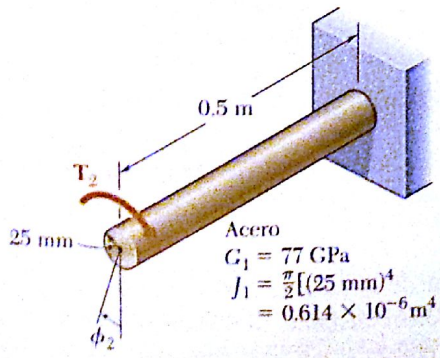
De la ecuación (2), se tiene que

$$2\,950\text{ N} \cdot \text{m} = 0.874 T_1 \qquad T_1 = 3\,375\text{ N} \cdot \text{m}$$

Utilizando la ecuación (1) se obtiene el par máximo permisible

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3\,375\text{ N} \cdot \text{m} + 2\,950\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = 6.325\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



Acero
$G_1 = 77$ GPa
$J_1 = \frac{\pi}{2}[(25\text{ mm})^4$
$= 0.614 \times 10^{-6}\text{m}^4$

PROBLEMAS

3.31 *a*) Para el tubo de aluminio que se muestra en la figura ($G = 27$ GPa), determine el par de torsión $\mathbf{T}_0$ que causa un ángulo de giro de 2°. *b*) Determine el ángulo de giro si se aplica el mismo par de torsión $\mathbf{T}_0$ a un eje cilíndrico sólido con igual longitud y área de sección transversal.

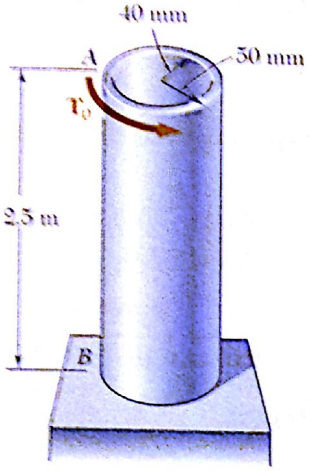


Figura P3.31

3.32 *a*) Para el eje sólido de acero que se muestra en la figura ($G = 77$ GPa), determine el ángulo de giro en *A*. *b*) Resuelva el inciso *a*) con el supuesto de que el eje de acero es hueco con un diámetro exterior de 30 mm y un diámetro interior de 20 mm.

3.33 El barco en *A* ha comenzado a perforar un pozo petrolero en el suelo oceánico a una profundidad de 5 000 ft. Si se sabe que la parte superior de la tubería de acero para perforación de 8 in. de diámetro ($G = 11.2 \times 10^6$ psi) gira dos revoluciones completas antes de que el barreno en *B* empiece a operar, determine el esfuerzo cortante máximo causado en la tubería por la torsión.

3.34 Determine el diámetro máximo permisible de una varilla de acero de 10 ft de largo ($G = 11.2 \times 10^6$ psi) si la varilla debe torcerse 30° sin exceder un esfuerzo cortante de 12 ksi.

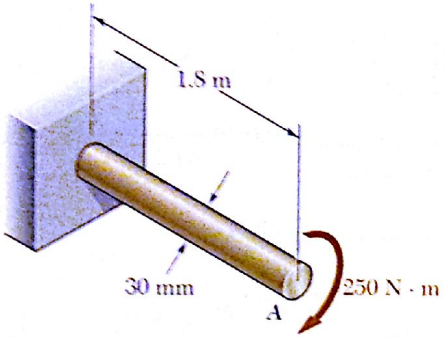


Figura *P3.32*

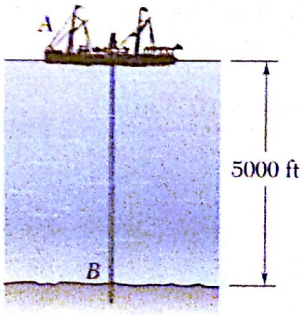


Figura P3.33

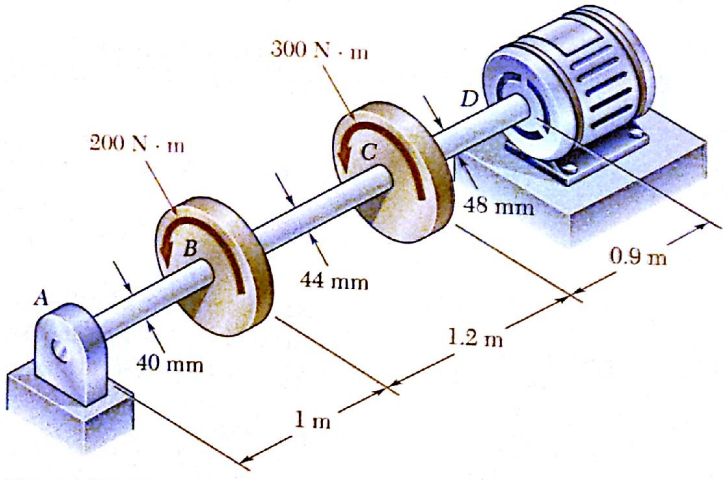


Figura *P3.35*

3.35 El motor eléctrico ejerce un par de torsión de 500 N · m sobre el eje de aluminio *ABCD*, mientras gira a una velocidad constante. Si se sabe que $G = 27$ GPa y que los pares de torsión ejercidos en las poleas *B* y *C* son como se muestran en la figura, determine el ángulo de giro entre *a*) *B* y *C*, *b*) *B* y *D*.

3.36 Los pares de torsión mostrados en la figura se ejercen sobre las poleas *A*, *B* y *C*. Si se sabe que ambos ejes son sólidos y están hechos de latón ($G = 39$ GPa), determine el ángulo de giro entre *a*) *A* y *B*, *b*) *A* y *C*.

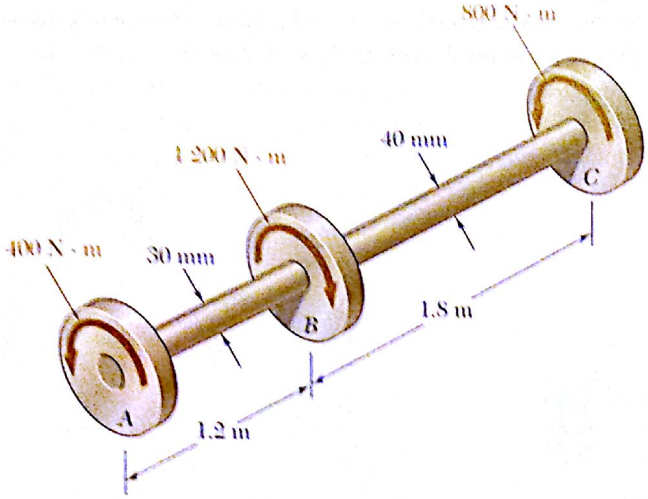


Figura P3.36

3.37 La varilla de aluminio *BC* ($G = 26$ GPa) está unida a la varilla de latón *AB* ($G = 39$ GPa). Si se sabe que cada varilla es sólida y tiene un diámetro de 12 mm, determine el ángulo de giro *a*) en *B*, *b*) en *C*.

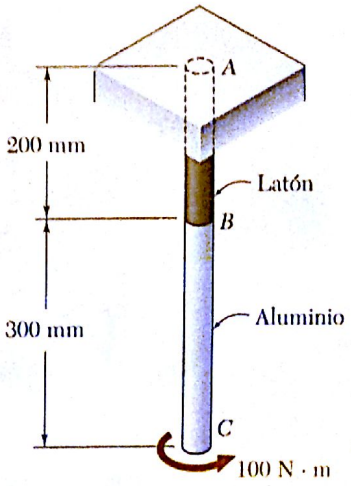


Figura P3.37

3.38 La varilla de aluminio *AB* ($G = 27$ GPa) está unida a la varilla de latón *BD* ($G = 39$ GPa). Si se sabe que la porción *CD* de la varilla de latón es hueca y tiene un diámetro interior de 40 mm, determine el ángulo de giro en *A*.

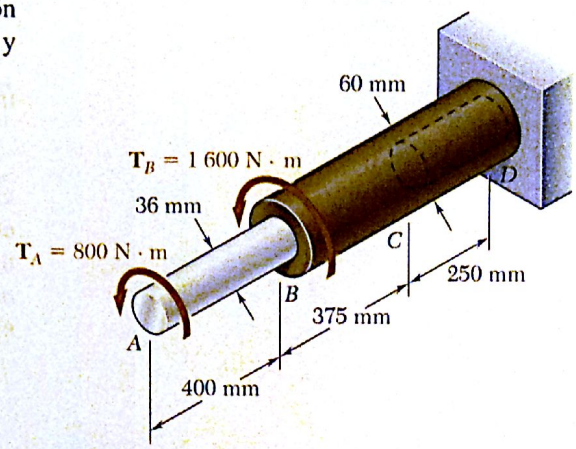


Figura P3.38

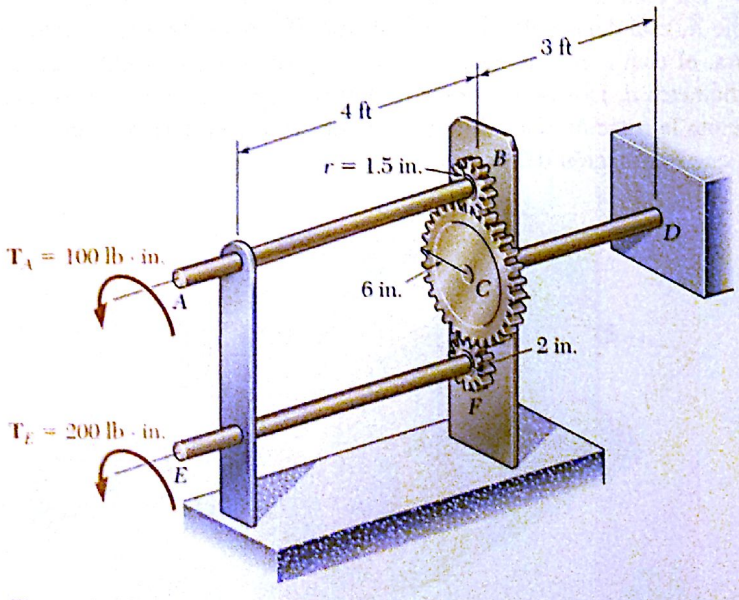


Figura *P3.39*

3.39 Tres ejes sólidos, cada uno con $\frac{3}{4}$ in. de diámetro, se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el ángulo a través del cual gira el extremo *A* del eje *AB*, *b*) el ángulo que gira el extremo *E* del eje *EF*.

3.40 Dos ejes, cada uno de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro, se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi y que el eje en F está fijo, determine el ángulo que gira el extremo A cuando se aplica un par de torsión de 1.2 kip · in. sobre A.

3.41 Dos ejes sólidos de acero se conectan mediante los engranes que se muestran en la figura. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa para cada uno de los ejes, determine el ángulo que gira el extremo A cuando $T_A = 1\,200$ N · m.

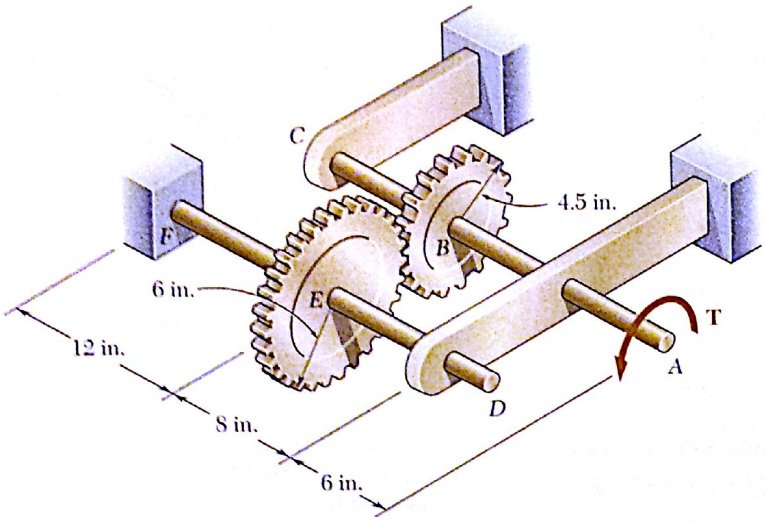


Figura P3.40

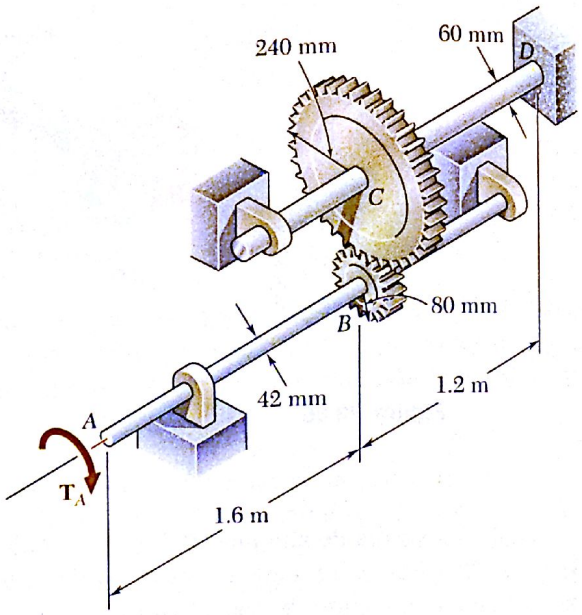


Figura P3.41

3.42 Retome el problema 3.41, y ahora suponga que cada eje tiene un diámetro de 54 mm.

3.43 Un codificador F, utilizado para el registro en forma digital de la rotación del eje A, está conectado al eje por medio del tren de engranes que se muestra en la figura, el cual consta de cuatro engranes y de tres ejes sólidos de acero, cada uno con diámetro d. Dos de los engranes tienen un radio r y los otros dos un radio nr. Si se evita la rotación del codificador F, determine en términos de T, l, G, J y n el ángulo que de rotación del extremo A.

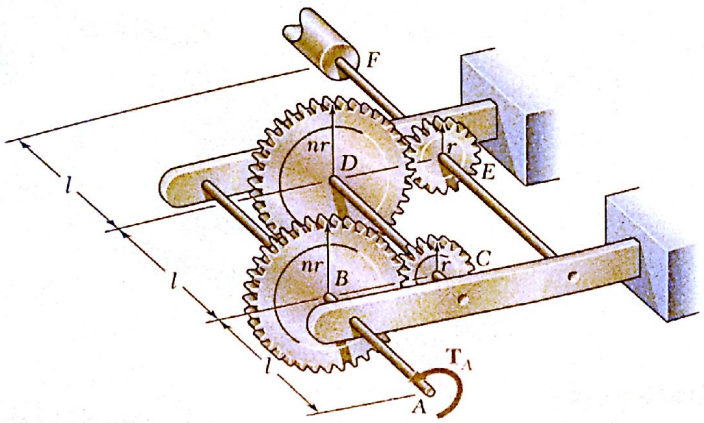


Figura *P3.43*

3.44 Para el tren de engranes descrito en el problema 3.43, determine el ángulo que gira el extremo A cuando $T = 5$ lb · in., $l = 2.4$ in., $d = \frac{1}{16}$ in., $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $n = 2$.

3.45 Las especificaciones de diseño de un eje sólido de transmisión con 1.2 m de longitud requieren que el ángulo de giro del eje no exceda 4° cuando se aplica un par de torsión de 750 N · m. Determine el diámetro requerido del eje, si está hecho de un acero que tiene un esfuerzo cortante permisible de 90 MPa y un módulo de rigidez de 77.2 GPa.

3.46 Un agujero se perfora en *A* sobre una hoja plástica aplicando una fuerza **P** de 600 N al extremo *D* de la palanca *CD*, la cual está rígidamente adherida al eje cilíndrico sólido *BC*. Las especificaciones de diseño requieren que el desplazamiento de *D* no exceda de 15 mm desde el momento en que la perforadora toca inicialmente la hoja plástica hasta el momento en que realmente la penetra. Determine el diámetro requerido del eje *BC* si éste es de un acero con $G = 77$ GPa y $\tau_{perm} = 80$ MPa.

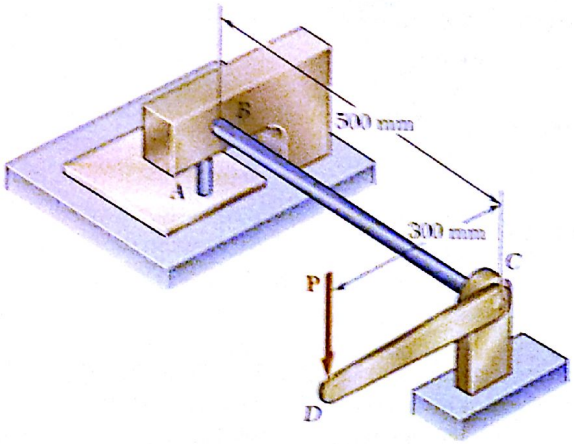


Figura P3.46

3.47 Las especificaciones de diseño para el sistema de engranes y ejes, que se muestra en la figura, requieren que se use el mismo diámetro para ambos ejes y que el ángulo a través del cual gire la polea *A* no exceda 7.5° cuando está sujeta a un par de torsión $\mathbf{T}_A$ de 2 kip · in. mientras la polea *D* se mantiene fija. Determine el diámetro requerido de los ejes si ambos están hechos de un acero con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $\tau_{perm} = 12$ ksi.

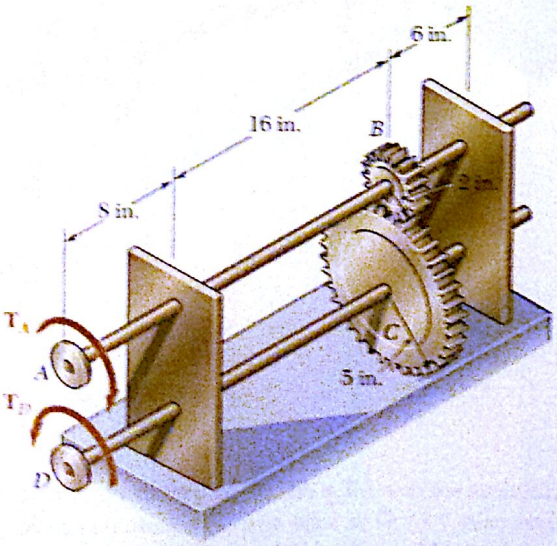


Figura P3.47

3.48 Retome el problema 3.47, y ahora suponga que ambos ejes están hechos de un latón con $G = 5.6 \times 10^6$ psi y $\tau_{perm} = 8$ ksi.

3.49 El diseño del sistema de engranes y ejes, que se muestra en la figura, requiere que se empleen ejes de acero del mismo diámetro tanto para AB como para CD. Se requiere además que $\tau_{máx} \leq 60$ MPa y que el ángulo ϕ_D en el cual gira el extremo D del eje CD no exceda 1.5°. Si se sabe que $G = 77$ GPa, determine el diámetro requerido de los ejes.

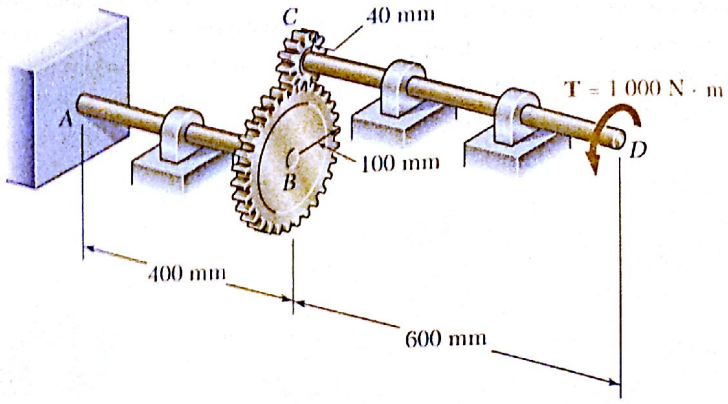


Figura P3.49

3.50 El motor eléctrico ejerce un par de torsión de 800 N · m sobre el eje de acero $ABCD$ cuando gira a una velocidad constante. Las especificaciones de diseño requieren que el diámetro del eje sea uniforme desde A hasta D y que el ángulo de giro entre A y D no exceda 1.5°. Si se sabe que $\tau_{máx} \leq 60$ MPa y que $G = 77$ GPa, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para el eje.

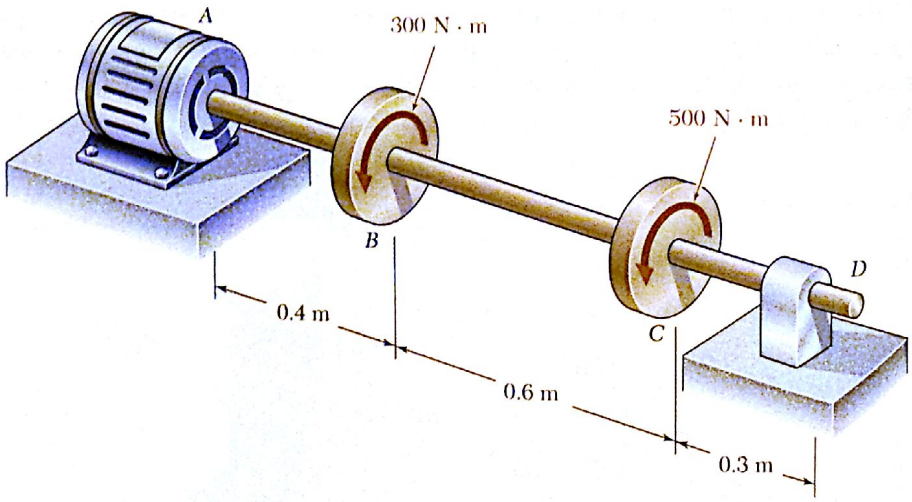


Figura P3.50

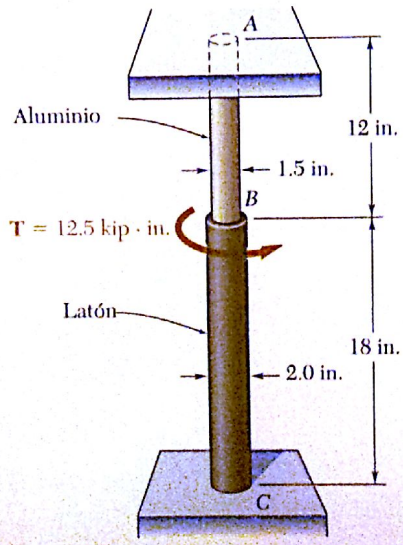


Figura *P3.51*

3.51 Los cilindros sólidos AB y BC están unidos en B y se encuentran adheridos a soportes fijos en A y C. Si se sabe que el módulo de rigidez es 3.7×10^6 psi para el aluminio y 5.6×10^6 psi para el latón, determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el cilindro AB, *b*) en el cilindro BC.

3.52 Retome el problema 3.51, y ahora suponga que el cilindro AB está hecho de acero, para el cual $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.53 El eje compuesto que muestra la figura consiste en una camisa de latón con 5 mm de grosor ($G_{\text{latón}} = 39$ GPa) unida a un núcleo de acero con 40 mm de diámetro ($G_{\text{acero}} = 77.2$ GPa). Si se sabe que el eje está sometido a un par de torsión de 600 N · m, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en la camisa de latón, *b*) el máximo esfuerzo cortante en el núcleo de acero, *c*) el ángulo de giro del extremo *B* con respecto al extremo *A*.

3.54 Para el eje compuesto del problema 3.53, el esfuerzo cortante permisible en la camisa de latón es de 20 MPa y 45 MPa en el núcleo de acero. Determine *a*) el par de torsión máximo que puede aplicarse al eje, *b*) el ángulo de giro correspondiente de *B* respecto a *A*.

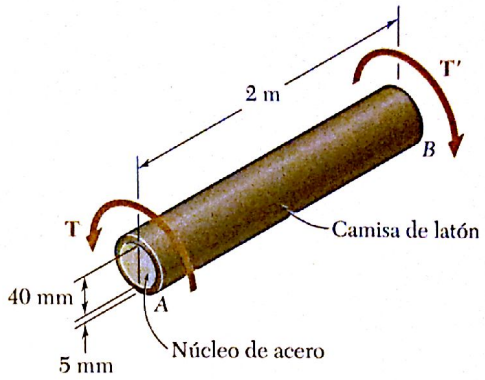


Figura P3.53 y P3.54

3.55 En un momento en que se impide la rotación en el extremo inferior de cada eje, un par de 50 N · m es aplicado al extremo *A* del eje *AB*. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa para ambos ejes, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el eje *CD*, *b*) el ángulo de rotación de *A*.

3.56 Retome el problema 3.55, y ahora suponga que el par de torsión de 80 N · m se aplica al extremo *C* del eje *CD*.

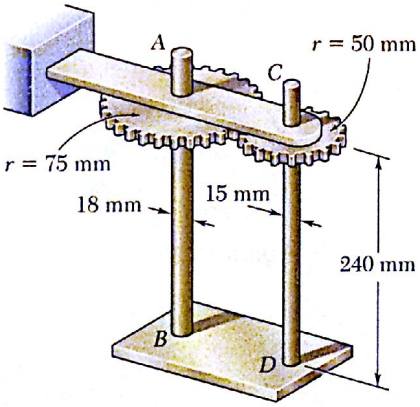


Figura *P3.55*

3.57 y 3.58 Dos ejes sólidos de acero están provistos de bridas que se conectan por pernos como se observa en la figura. Los pernos están ligeramente holgados y permiten una rotación de 1.5° de una brida respecto a la otra antes de que las bridas empiecen a girar como una sola unidad. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el esfuerzo cortante máximo en cada eje cuando un par **T** con magnitud 420 kip · ft se aplica a la brida que se indica.

3.57 El par de torsión **T** se aplica a la brida *B*.

3.58 El par de torsión **T** se aplica a la brida *C*.

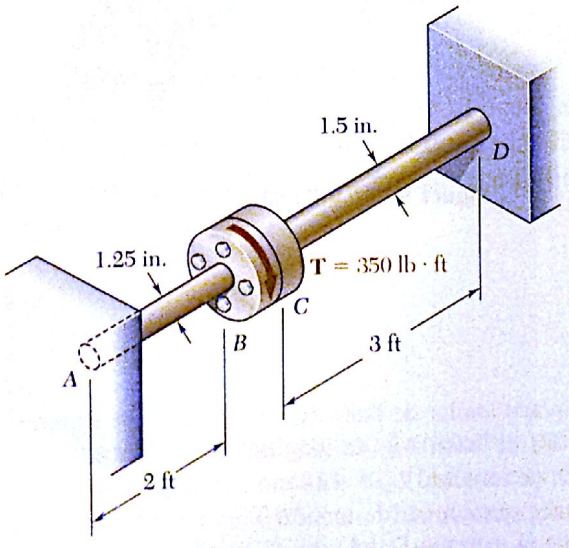


Figura P3.57 y P3.58

3.59 La camisa de acero *CD* ha sido unida al eje de acero de 40 mm de diámetro *AE* por medio de bridas *rígidas* soldadas a la camisa y al eje. El diámetro exterior de la camisa es de 80 mm y su espesor de pared de 4 mm. Si se aplican pares de torsión de 500 N · m, como se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo en la camisa.

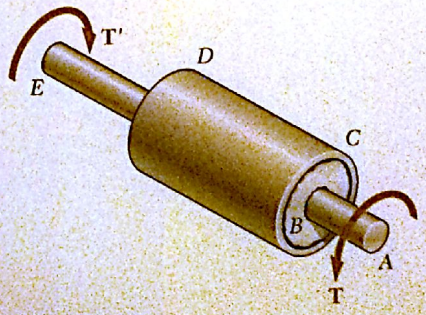


Figura P3.59

3.60 El momento de inercia de masa de un engrane se determinará experimentalmente utilizando un péndulo de torsión que consiste en un alambre de acero de 6 ft. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el diámetro del alambre para el que la constante torsional de resorte será de 4.27 lb · ft/rad.

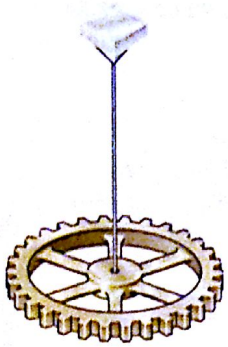


Figura P3.60

3.61 Una placa anular de espesor t y módulo de rigidez G se usa para conectar el eje AB de radio r_1 al tubo CD con radio r_2. Si se sabe que un par de torsión T se aplica al extremo A del eje AB y que el extremo D del tubo CD se encuentra fijo, *a*) determine la magnitud y localización del esfuerzo cortante máximo en la placa anular, *b*) muestre que el ángulo en que gira el extremo B del eje respecto al extremo C del tubo es

$$\phi_{BC} = \frac{T}{4\pi Gt}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

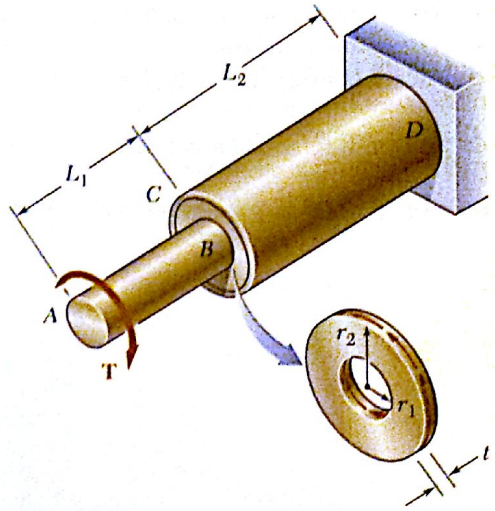


Figura P3.61 y P3.62

3.62 Una placa anular de latón ($G = 39$ GPa), de espesor $t = 6$ mm, se usa para conectar el eje de latón AB, de longitud $L_1 = 50$ mm y radio $r_1 = 30$ mm al tubo de latón CD, de longitud $L_2 = 125$ mm, radio interior $r_2 = 75$ mm y espesor $t = 3$ mm. Si se sabe que un par de torsión T de 2.8 kN · m se aplica en el extremo A del eje AB y que el extremo D del tubo CD está fijo, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el sistema de eje, placa y tubo, *b*) el ángulo en que gira el extremo A. (*Sugerencia*: Utilice la fórmula deducida en el problema 3.61 para resolver el inciso *b*.)

3.63 Un eje sólido y un eje hueco son del mismo material y tienen el mismo peso y longitud. Denote con n la razón c_i/c_o, y demuestre que la razón T_s/T_h del par de torsión T_s en el eje sólido al par T_h en el eje hueco es *a*) $\sqrt{(1 - n^2)/(1 + n^2)}$ si el esfuerzo cortante máximo es el mismo en cada eje, *b*) $(1 - n)/(1 + n^2)$ si el ángulo de giro es el mismo para cada eje.

3.7 DISEÑO DE EJES DE TRANSMISIÓN

Las especificaciones principales que deben cumplirse en el diseño de un eje de transmisión son la *potencia* que debe transmitirse y la *velocidad de rotación* del eje. La función del diseñador es seleccionar el material y las dimensiones de la sección transversal del eje, para que el esfuerzo cortante máximo permisible del material no sea excedido cuando el eje transmite la potencia requerida a la velocidad especificada.

Para determinar el par de torsión ejercido sobre el eje, recuerde, de la dinámica elemental, que la potencia P asociada con la rotación de un cuerpo rígido sujeto a un par $\mathbf{T}$ es

$$P = T\omega \tag{3.19}$$

donde ω es la velocidad angular del cuerpo expresada en radianes por segundo. Pero $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de rotación, es decir, el número de revoluciones por segundo. La unidad de frecuencia es, entonces, 1 s^{-1} y se llama *hertz* (Hz). Sustituyendo ω en la ecuación (3.19) se obtiene

$$P = 2\pi fT \tag{3.20}$$

Si se emplean unidades SI se verifica que, si la frecuencia se expresa en Hz y T en N · m, la potencia se expresará en N · m/s, esto es, en *watts* (W). Despejando T de la ecuación (3.20), se obtiene el par ejercido sobre un eje que transmite una potencia P a una frecuencia de rotación f.

$$T = \frac{P}{2\pi f} \tag{3.21}$$

donde P, f y T se expresan en las unidades indicadas antes.

Después de haber determinado el par $\mathbf{T}$ que se aplicará al eje y habiendo seleccionado el material que será utilizado, el diseñador lleva los valores de T y del esfuerzo máximo permisible a la fórmula de torsión elástica (3.9). Despejando J/c, se tiene

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} \tag{3.22}$$

y se obtiene de esta manera el valor mínimo permisible para el parámetro J/c. Se verifica que, si se emplean unidades SI, T estará expresado en N · m, $\tau_{\text{máx}}$ en Pa (o N/m^2) y J/c se obtendrá en m^3. En el caso de un eje circular sólido, $J = \frac{1}{2}\pi c^4$, y $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$; sustituyendo este valor para J/c en la ecuación (3.22) y despejando c, esto da como resultado el mínimo valor permisible para el radio del eje. En el caso de un eje circular hueco, el parámetro crítico es J/c_2, donde c_2 es el radio exterior del eje; el valor de este parámetro puede calcularse de la ecuación (3.11) de la sección 3.4 para determinar si una sección transversal dada será aceptable.

Cuando se emplean las unidades usuales en Estados Unidos, la frecuencia, por lo general, se expresa en rpm y la potencia en caballos de potencia (hp). Es entonces necesario, antes de aplicar la fórmula (3.21), convertir la

frecuencia a revoluciones por segundo (es decir, hertz) y la potencia a ft · lb/s o in · lb/s mediante el uso de las siguientes relaciones:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1}{60} \text{ s}^{-1} = \frac{1}{60} \text{ Hz}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

Si se expresa la potencia en in. · lb/s, la fórmula (3.21) dará el valor del par T en lb · in. Al llevar este valor de T a la ecuación (3.22), y expresando $\tau_{máx}$ en psi, se obtiene el valor del parámetro J/c en in^3.

EJEMPLO 3.06

¿Qué tamaño de eje debe usarse para el rotor de un motor de 5 hp que opera a 3 600 rpm si el esfuerzo cortante no debe exceder 8 500 psi en el eje?

Primero se expresa la potencia del motor en in. · lb/s y su frecuencia en ciclos por segundo (o hertz).

$$P = (5 \text{ hp})\left(\frac{6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}}{1 \text{ hp}}\right) = 33\,000 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

$$f = (3\,600 \text{ rpm})\frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 60 \text{ Hz} = 60 \text{ s}^{-1}$$

El par ejercido sobre el eje es dado por la ecuación (3.21):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{33\,000 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}}{2\pi\,(60 \text{ s}^{-1})} = 87.54 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Sustituyendo T y $\tau_{máx}$ en la ecuación (3.22), se tiene

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{máx}} = \frac{87.54 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{8\,500 \text{ psi}} = 10.30 \times 10^{-3} \text{ in.}^3$$

Pero $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$ para un eje sólido. Se tiene por lo tanto

$$\tfrac{1}{2}\pi c^3 = 10.30 \times 10^{-3} \text{ in.}^3$$

$$c = 0.1872 \text{ in.}$$

$$d = 2c = 0.374 \text{ in.}$$

y debe usarse un eje de $\frac{3}{8}$ in.

EJEMPLO 3.07

Un eje que consta de un tubo de acero de 50 mm de diámetro exterior debe transmitir 100 kW de potencia mientras gira a una frecuencia de 20 Hz. Determine el espesor del tubo que deberá utilizarse si el esfuerzo cortante no debe exceder 60 MPa.

El par de giro ejercido en el eje es dado por la ecuación (3.21):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi\,(20 \text{ Hz})} = 795.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De la ecuación (3.22) se concluye que el parámetro J/c_2 debe ser por lo menos igual a

$$\frac{J}{c_2} = \frac{T}{\tau_{máx}} = \frac{795.8 \text{ N} \cdot \text{m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 13.26 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \qquad (3.23)$$

Pero, de la ecuación (3.10), se tiene que

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{0.050}[(0.025)^4 - c_1^4] \qquad (3.24)$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (3.23) y (3.24):

$$(0.025)^4 - c_1^4 = \frac{0.050}{\pi}(13.26 \times 10^{-6})$$

$$c_1^4 = 390.6 \times 10^{-9} - 211.0 \times 10^{-9} = 179.6 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$c_1 = 20.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 20.6 \text{ mm}$$

El espesor correspondiente del tubo es

$$c_2 - c_1 = 25 \text{ mm} - 20.6 \text{ mm} = 4.4 \text{ mm}$$

Debe utilizarse un tubo de espesor de 5 mm.

La fórmula de torsión $\tau_{máx} = Tc/J$ se dedujo en la sección 3.4 para un eje circular con sección transversal uniforme. Además, se había supuesto en la sección 3.3 que el eje estaba cargado en sus extremos a través de placas rígidas sólidamente unidas a él. En la práctica, sin embargo, los pares de torsión comúnmente se aplican al eje mediante acoplamientos de brida (figura 3.30*a*) o por medio de engranes conectados al eje por cuñas que caben dentro de cuñeros (figura 3.30*b*). En ambos casos se esperaría que la distribución de esfuerzos, en la sección donde se aplican los pares, o cerca de ella sea diferente de la que es dada por la fórmula de torsión. Ocurrirán, por ejemplo, altas concentraciones de esfuerzos en la cercanía del cuñero mostrado en la figura 3.30*b*. La determinación de estos esfuerzos localizados puede llevarse a cabo por métodos de análisis experimental de esfuerzos o, en algunos casos, gracias al uso de la teoría matemática de la elasticidad.

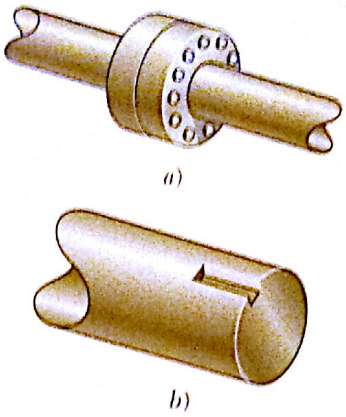


Figura 3.30

Como se indicó en la sección 3.4, también es posible emplear la fórmula de torsión en un eje de sección transversal circular variable. Sin embargo, en el caso de un eje con un cambio abrupto en el diámetro de su sección transversal, las concentraciones de esfuerzo ocurrirán cerca de la discontinuidad, y los esfuerzos más altos ocurrirán en A (figura 3.31). Estos esfuerzos

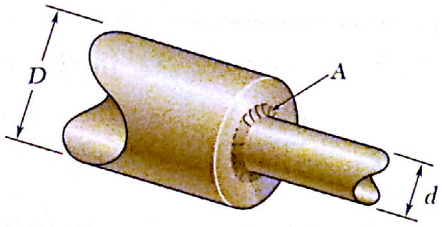


Figura 3.31

pueden reducirse utilizando un filete, y el valor del esfuerzo cortante máximo en el filete puede expresarse como

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

donde el esfuerzo Tc/J es el esfuerzo calculado para el eje de menor diámetro, y donde K es un factor de concentración de esfuerzos. Como el factor K depende sólo de la razón de los dos diámetros y de la razón del radio del filete al diámetro del eje más pequeño, puede calcularse de una vez por todas y registrarse en forma de tabla o de gráfica, como se muestra en la figura 3.32. Debe observarse, sin embargo, que este procedimiento para determinar esfuerzos cortantes localizados es válido sólo si el valor de $\tau_{máx}$ dado por la ecuación (3.25) no excede el límite de proporcionalidad del material, ya que los valores de K graficados en la figura 3.32 se obtuvieron bajo la suposición de una relación lineal entre los esfuerzos cortantes y la deformación a cortante. Si ocurren deformaciones plásticas, resultarán en valores del esfuerzo máximo más bajas que las indicadas por la ecuación (3.25).

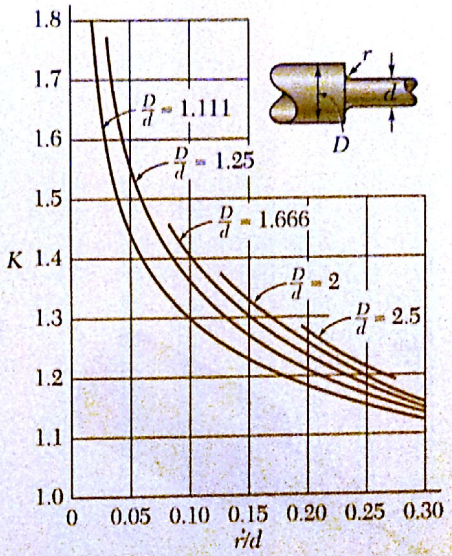
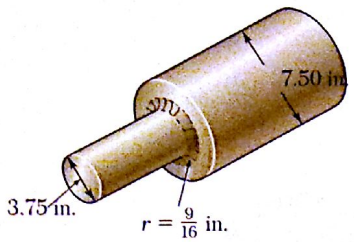


Figura 3.32 Factores de concentración de esfuerzos para filetes en ejes circulares.†

† W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.



PROBLEMA MODELO 3.6

El eje escalonado que se ilustra en la figura debe girar a 900 rpm para transmitir potencia de una turbina a un generador. El grado de acero especificado en el diseño tiene un esfuerzo cortante permisible de 8 ksi. *a*) Para el diseño preliminar mostrado, determine la potencia máxima que puede transmitirse. *b*) Si en el diseño final se aumenta el radio del filete de tal manera que $r = \frac{15}{16}$ in., ¿cuál será el cambio porcentual, en relación con el diseño preliminar, en la potencia que puede transmitirse?

SOLUCIÓN

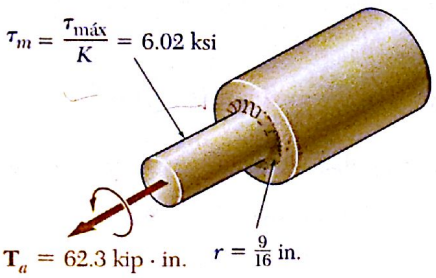
***a*) Diseño preliminar.** Usando la notación de la figura 3.32, se tiene $D = 7.50$ in., $d = 3.75$ in., $r = \frac{9}{16}$ in. $= 0.5625$ in.

$$\frac{D}{d} = \frac{7.50 \text{ in.}}{3.75 \text{ in.}} = 2 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0.5625 \text{ in.}}{3.75 \text{ in.}} = 0.15$$

Se encuentra un factor de concentración de esfuerzos $K = 1.33$ de la figura 3.32.

Par de torsión. De la ecuación (3.25), se escribe

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \qquad T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} \tag{1}$$



donde J/c se refiere al eje de menor diámetro:

$$J/c = \tfrac{1}{2}\pi c^3 = \tfrac{1}{2}\pi\,(1.875 \text{ in.})^3 = 10.35 \text{ in.}^3$$

y donde

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{8 \text{ ksi}}{1.33} = 6.02 \text{ ksi}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se encuentra que $T = (10.35 \text{ in.}^3)(6.02 \text{ ksi}) = 62.3$ kip · in.

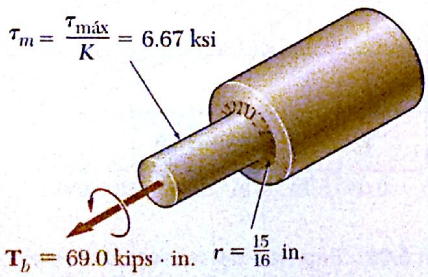
Potencia. Puesto que $f = (900 \text{ rpm})\dfrac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 15 \text{ Hz} = 15 \text{ s}^{-1}$, se escribe

$$P_a = 2\pi fT = 2\pi(15 \text{ s}^{-1})(62.3 \text{ kip} \cdot \text{in.}) = 5.87 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

$$P_a = (5.87 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s})(1 \text{ hp}/6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}) \qquad P_a = 890 \text{ hp} \blacktriangleleft$$

***b*) Diseño final.** Para $r = \frac{15}{16}$ in. $= 0.9375$ in.,

$$\frac{D}{d} = 2 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0.9375 \text{ in.}}{3.75 \text{ in.}} = 0.250 \qquad K = 1.20$$



Siguiendo el procedimiento utilizado antes, se escribe

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{8 \text{ ksi}}{1.20} = 6.67 \text{ ksi}$$

$$T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = (10.35 \text{ in.}^3)(6.67 \text{ ksi}) = 69.0 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

$$P_b = 2\pi fT = 2\pi\,(15 \text{ s}^{-1})(69.0 \text{ kip} \cdot \text{in.}) = 6.50 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

$$P_b = (6.50 \times 10^6 \text{ in.} \cdot \text{lb/s})(1 \text{ hp}/6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}) = 985 \text{ hp}$$

Cambio porcentual en potencia

$$\text{Cambio porcentual} = 100\frac{P_b - P_a}{P_a} = 100\frac{985 - 890}{890} = +11\% \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.64 Determine el esfuerzo cortante máximo en un eje sólido con 1.5 in. de diámetro cuando transmite 75 hp a una velocidad de *a*) 750 rpm, *b*) 1 500 rpm.

3.65 Determine el esfuerzo cortante máximo en un eje sólido con 12 mm de diámetro cuando transmite 2.5 kW a una frecuencia de *a*) 25 Hz, *b*) 50 Hz.

3.66 Con un esfuerzo cortante permisible de 50 MPa, diseñe un eje sólido de acero para transmitir 15 kW a una frecuencia de *a*) 30 Hz, *b*) 60 Hz.

3.67 Con un esfuerzo cortante permisible de 4.5 ksi, diseñe un eje sólido de acero para transmitir 12 hp a una velocidad de *a*) 1 200 rpm, *b*) 2 400 rpm.

3.68 Cuando el eje hueco de acero que se muestra en la figura gira a 180 rpm, una medición estroboscópica indica que el ángulo de giro del eje es 3°. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa, determine *a*) la potencia transmitida, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el eje.

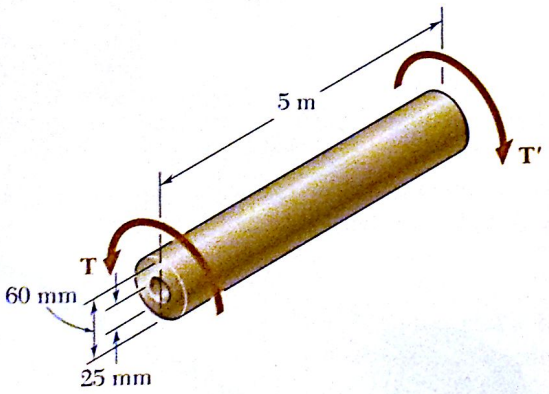


Figura P3.68 y P3.69

3.69 El eje hueco de acero que se muestra en la figura ($G = 77.2$ GPa, $\tau_{perm} = 50$ MPa) gira a 240 rpm. Determine *a*) la potencia máxima que puede transmitirse, *b*) el ángulo de giro correspondiente para el eje.

3.70 Uno de dos ejes huecos de transmisión de un trasatlántico tiene 125 ft de largo, y sus diámetros exterior e interior son de 16 in. y de 8 in., respectivamente. El eje está hecho de un acero para el que $\tau_{perm} = 8\,500$ psi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Si se sabe que la máxima velocidad de rotación del eje es de 165 rpm, determine *a*) la máxima potencia que puede transmitirse por un eje a su hélice, *b*) el ángulo de giro correspondiente para el eje.

3.71 Un eje de transmisión hueco, hecho de acero ($G = 11.2 \times 10^6$ psi), tiene 8 ft de longitud y sus diámetros exterior e interior son, respectivamente, 2.50 in. y 1.25 in. Si se sabe que el eje transmite 200 hp mientras gira a 1 500 rpm, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo, *b*) el ángulo de giro del eje.

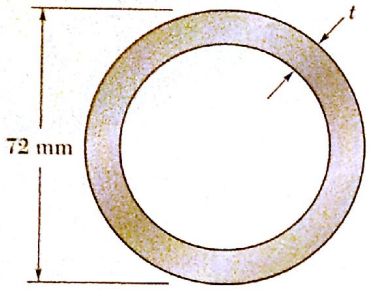


Figura P3.72

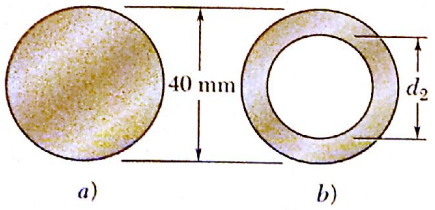


Figura *P3.73*

3.72 Un tubo de acero de 72 mm de diámetro exterior será empleado para transmitir un par de torsión de 2 500 N · m sin exceder un esfuerzo permisible máximo de 55 MPa. Una serie de tubos de 72 mm de diámetro exterior se encuentra disponible para su uso. Si se sabe que el espesor de pared de los tubos varía desde 4 hasta 10 mm en incrementos de 2 mm, elija el tubo más ligero que puede usarse.

3.73 El diseño de un elemento de máquina requiere que un eje de 40 mm de diámetro exterior transmita 45 kW. *a*) Si la velocidad de rotación es de 720 rpm, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje *a*. *b*) Si la velocidad de rotación puede incrementarse en 50% a 1 080 rpm, determine el máximo diámetro interior del eje *b* para el que el esfuerzo cortante máximo sea el mismo en cada eje.

3.74 Un eje de acero sólido con 1.5 m de longitud y 22 mm de diámetro debe transmitir 12 kW. Determine la frecuencia mínima a la que debe girar el eje, si sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 30 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 3.5°.

3.75 Un eje de acero sólido con 2.5 m de longitud debe transmitir 10 kW a una frecuencia de 25 Hz. Determine el diámetro requerido del eje, si sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 30 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 4°.

3.76 Los dos ejes sólidos y los engranes que se muestran en la figura se emplean para transmitir 16 hp desde el motor *A* hasta la máquina herramienta en *D*, a una velocidad de 1 260 rpm. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi, determine el diámetro requerido *a*) del eje *AB*, *b*) del eje *CD*.

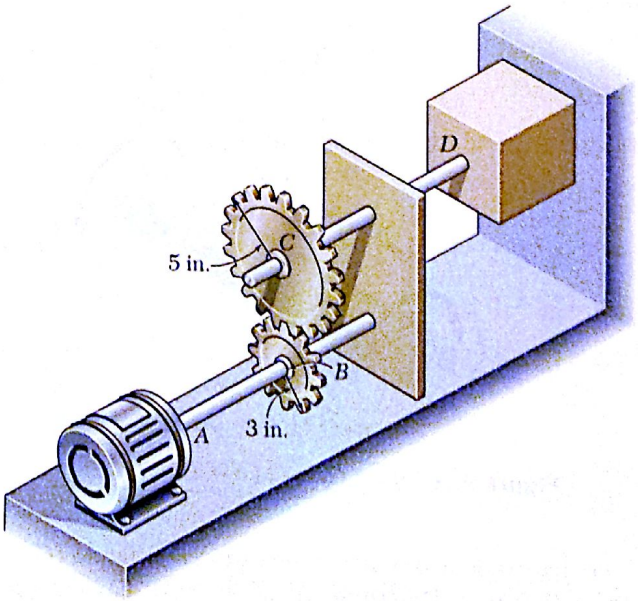


Figura P3.76 y P3.77

3.77 Los dos ejes sólidos y los engranes que se muestran en la figura se emplean para transmitir 16 hp desde el motor *A* hasta la máquina herramienta en *D*, a una velocidad de 1 260 rpm. Si se sabe que cada eje tiene un diámetro de 1 in., determine el esfuerzo cortante máximo *a*) en el eje *AB*, *b*) en el eje *CD*.

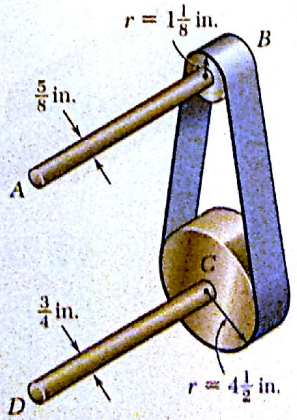


Figura P3.78

3.78 El arreglo de eje, disco y banda, que se muestra en la figura se emplea para transmitir 3 hp desde el punto *A* hasta el punto *D*. *a*) Con un esfuerzo cortante permisible de 9 500 psi, determine la velocidad requerida del eje *AB*. *b*) Resuelva el inciso *a*), con el supuesto de que los diámetros de los ejes *AB* y *CD* son, respectivamente, 0.75 in. y 0.625 in.

3.79 Un eje de acero de 5 ft de longitud y 0.875 in. de diámetro debe transmitir 18 hp. Determine la velocidad mínima a la que puede girar el eje, si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, que el esfuerzo cortante permisible es de 4.5 ksi y que el ángulo de giro no debe exceder 3.5°.

3.80 Un eje de acero de 2.5 m de longitud y 30 mm de diámetro gira a una frecuencia de 30 Hz. Determine la potencia máxima que puede transmitir el eje, si se sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 7.5°.

3.81 Un eje de acero debe transmitir 150 kW a una velocidad de 360 rpm. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa, diseñe un eje sólido tal que el esfuerzo cortante máximo no exceda 50 MPa y el ángulo de giro en una longitud de 2.5 m no exceda 3°.

3.82 Un eje tubular de acero de 1.5 m de longitud, 38 mm de diámetro exterior d_1 y 30 mm de diámetro interior d_2 debe transmitir 100 kW entre una turbina y un generador. Determine la frecuencia mínima a la que puede girar el eje, si se sabe que $G = 77.2$ GPa, que el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa y que el ángulo de giro no debe exceder 3°.

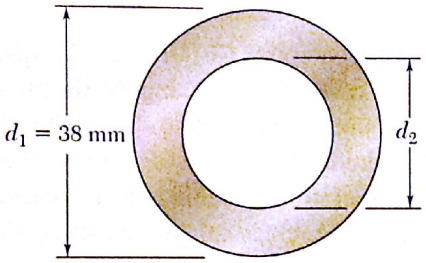


Figura *P3.82* y P3.83

3.83 Un eje tubular de acero de 1.5 m de longitud y 38 mm de diámetro exterior d_1 será hecho con un acero para el que $\tau_{perm} = 65$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Si se sabe que el ángulo de giro no debe exceder 4° cuando el eje es sometido a un par de torsión de 600 N · m, determine el máximo diámetro interior d_2 que puede especificarse en el diseño.

3.84 El eje escalonado que se muestra en la figura gira a 450 rpm. Si se sabe que $r = 0.2$ in., determine la máxima potencia que puede transmitirse sin exceder un esfuerzo cortante permisible de 7 500 psi.

3.85 El eje escalonado que se muestra en la figura gira a 450 rpm. Si se sabe que $r = 0.5$ in., determine la máxima potencia que puede transmitirse sin exceder un esfuerzo cortante permisible de 7 500 psi.

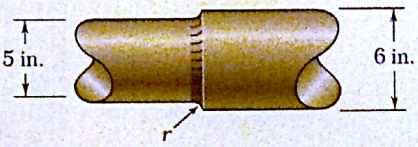


Figura *P3.84* y *P3.85*

3.86 El eje escalonado que se muestra en la figura debe girar a una frecuencia de 50 Hz. Si se sabe que el radio del filete es $r = 8$ mm y que el esfuerzo cortante permisible es de 45 MPa, determine la máxima potencia que puede transmitirse.

3.87 Si se sabe que el eje escalonado que se muestra en la figura debe transmitir 45 kW a una velocidad de 2 100 rpm, determine el radio r mínimo para el filete si no debe excederse un esfuerzo cortante permisible de 50 MPa.

3.88 El eje escalonado que se muestra en la figura debe transmitir 45 kW. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en el eje es de 40 MPa y que el radio del filete es $r = 6$ mm, determine la mínima velocidad permisible en el eje.

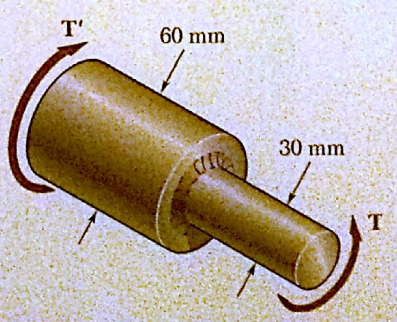
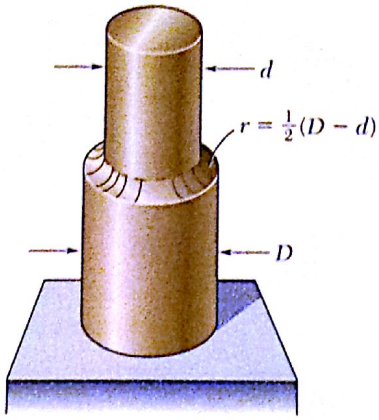


Figura P3.86, P3.87, y P3.88



El filete completo de cuarto de caña se extiende hasta el borde del eje más grande.

Figura P3.89, P3.90 y P3.91

3.89 En el eje escalonado que se muestra en la figura, el cual tiene un filete completo de cuarto de caña, el esfuerzo cortante permisible es de 80 MPa. Si se sabe que $D = 30$ mm, determine el par de torsión máximo permisible que puede aplicarse al eje si *a*) $d = 26$ mm, *b*) $d = 24$ mm.

3.90 En el eje escalonado que se muestra en la figura, el cual tiene un filete completo de cuarto de caña, $D = 1.25$ in. y $d = 1$ in. Si se sabe que la velocidad del eje es de 2 400 rpm y que el esfuerzo cortante permisible es de 7 500 psi, determine la máxima potencia que puede transmitirse mediante este eje.

3.91 Un par de torsión con magnitud $T = 2000$ lb · in. se aplica al eje escalonado que tiene un filete completo de cuarto de caña. Si se sabe que $D = 1$ in., determine el esfuerzo cortante máximo en el eje cuando *a*) $d = 0.8$ in., *b*) $d = 0.9$ in.

*3.9 DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN EJES CIRCULARES

Cuando se dedujeron las ecuaciones (3.10) y (3.16), que definen, respectivamente, la distribución de esfuerzos y el ángulo de giro para un eje circular sometido a un par de torsión **T**, se supuso que la ley de Hooke se aplicaba en todo el eje. Si la resistencia a la fluencia se excede en alguna porción del eje, o si el material involucrado es frágil con un diagrama no lineal de esfuerzo-deformación a cortante, estas relaciones dejan de ser válidas. El propósito de esta sección es desarrollar un método más general, que pueda utilizarse cuando no se aplique la ley de Hooke, para determinar la distribución de esfuerzos en un eje sólido circular, y para calcular el par de torsión requerido para producir un ángulo de giro dado.

Tenga en cuenta que no se supuso ninguna relación específica de esfuerzo-deformación en la sección 3.3, cuando se probó que la deformación

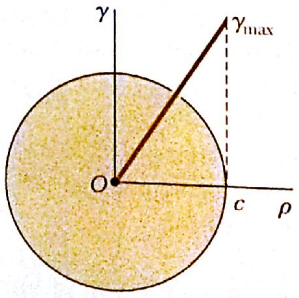


Figura 3.33

a corte γ varía linealmente con la distancia ρ desde el eje de la flecha (figura 3.33). Así, esta propiedad aún puede utilizarse en el análisis y escribirse

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{máx} \tag{3.4}$$

donde c es el radio del eje.

Suponiendo que el valor máximo $\tau_{máx}$ del esfuerzo cortante τ se ha especificado, la gráfica de τ contra ρ puede obtenerse como sigue. Primero se determina el valor de $\gamma_{máx}$ del diagrama esfuerzo-deformación a corte, que corresponde a $\tau_{máx}$ (figura 3.34), y se introduce en la ecuación (3.4).

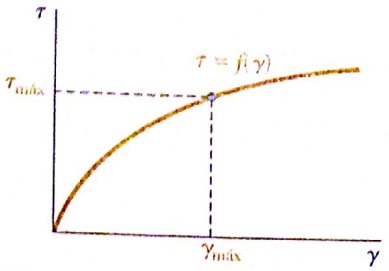


Figura 3.34

Entonces, para cada valor de ρ, se determina el valor correspondiente de γ de la ecuación (3.4) o de la figura 3.33 y se obtiene el esfuerzo cortante τ que corresponde a este valor de γ del diagrama esfuerzo-deformación de la figura 3.34. Graficando τ contra ρ se encuentra la distribución deseada de esfuerzo (figura 3.35).

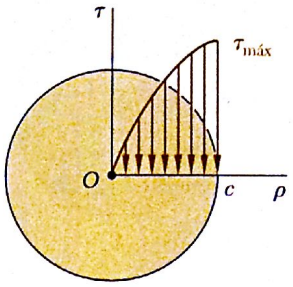


Figura 3.35

Recuerde ahora que, cuando se dedujo la ecuación (3.1) en la sección 3.2, no se supuso ninguna relación particular entre el esfuerzo y la deformación a corte. Puede, por lo tanto, utilizarse la ecuación (3.1) para determinar el par **T** que corresponde a la distribución de esfuerzos cortantes obtenida en la figura 3.35. Considerando un elemento anular con radio ρ y espesor $d\rho$, se expresa el elemento de área en la ecuación (3.1) como $dA = 2\pi\rho\, d\rho$ y se escribe

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho)$$

o

$$T = 2\pi \int_0^c \rho^2\tau\, d\rho \tag{3.26}$$

donde τ es la función de ρ graficada en la figura 3.35.

Si τ es una función analítica conocida de γ, la ecuación (3.4) puede utilizarse para expresar τ como función de ρ, y la integral de la ecuación (3.26) puede obtenerse analíticamente. De otra manera, el par **T** puede obtenerse mediante integración numérica. Este cálculo se vuelve más significativo si se advierte que la integral en la ecuación (3.26) representa el segundo momento, o momento de inercia, con respecto al eje vertical del área de la figura 3.35 localizada por encima del eje horizontal y limitada por la curva de distribución de esfuerzos.

Un valor importante del par de torsión es el par último T_U que causa la falla del eje. Este valor puede determinarse a partir del esfuerzo cortante último τ_U del material eligiendo $\tau_{máx} = \tau_U$ y realizando los cálculos indicados antes. Sin embargo, en la práctica es más conveniente determinar T_U experimentalmente torciendo una probeta de un material dado hasta romperlo. Suponiendo una distribución de esfuerzos lineal ficticia, la ecuación (3.9) se emplea entonces para determinar el esfuerzo cortante máximo correspondiente R_T:

$$R_T = \frac{T_U c}{J} \tag{3.27}$$

El esfuerzo ficticio R_T se denomina *módulo de ruptura a torsión* del material dado. Puede utilizarse para determinar el par último T_U de un eje hecho del mismo material pero de diferentes dimensiones, a partir de despejar T_U de la ecuación (3.27). Ya que las distribuciones de esfuerzos real y lineal ficticias mostradas en la figura 3.36 deben dar el mismo valor de T_U para el par

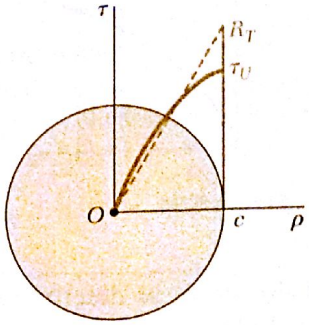


Figura 3.36

último, las áreas que definen deben tener el mismo momento de inercia con respecto al eje vertical. Por lo tanto, es claro que el módulo de ruptura R_T siempre será mayor que el valor real del esfuerzo cortante último τ_U.

En algunos casos, puede desearse determinar la distribución de esfuerzos y el par **T** correspondientes a un ángulo de giro dado ϕ. Esto puede hacerse recordando la expresión obtenida en la sección 3.3 para la deformación cortante γ en términos de ϕ, ρ y la longitud L del eje:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

Con ϕ y L dados, a partir de la ecuación (3.2) puede determinarse el valor de γ correspondiente a cualquier valor dado de ρ. Utilizando el diagrama esfuerzo-deformación del material, es posible entonces obtener el valor correspondiente del esfuerzo cortante τ y graficar τ contra ρ. Una vez obtenida la distribución del esfuerzo cortante, el par **T** puede determinarse analítica o numéricamente, como se explicó antes.

*3.10 EJES CIRCULARES HECHOS DE UN MATERIAL ELASTOPLÁSTICO

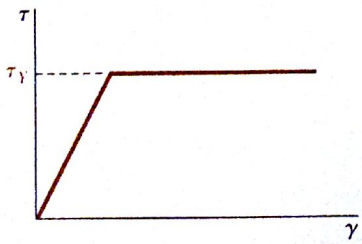


Figura 3.37

Se obtiene un panorama más amplio del comportamiento plástico de un eje sometido a torsión si se considera el caso idealizado de un *eje circular sólido hecho de un material elastoplástico*. El diagrama esfuerzo-deformación cortante de tal material se muestra en la figura 3.37. Utilizando este diagrama, puede procederse como se indicó anteriormente y encontrarse la distribución de esfuerzos en una sección del eje para cualquier valor del par **T**.

Mientras el esfuerzo cortante τ no exceda la resistencia de cedencia τ_Y, se aplica la ley de Hooke, y la distribución de esfuerzos a través de la sección es lineal (figura 3.38*a*), y $\tau_{máx}$ es dado por la ecuación (3.9):

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

Al aumentar el par, $\tau_{máx}$ finalmente alcanza el valor τ_Y (figura 3.38*b*). Sustituyendo este valor en la ecuación (3.9) y despejando el valor correspondiente de T, se obtiene el valor T_Y del par al inicio de la cedencia:

$$T_Y = \frac{J}{c}\tau_Y \tag{3.28}$$

El valor obtenido se conoce como el *par de torsión máximo elástico*, ya que es el máximo par para el que la deformación permanece completamente elástica. Recordando que para un eje circular sólido $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$, se tiene que

$$T_Y = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_Y \tag{3.29}$$

Al incrementarse el par aún más, se desarrolla una región plástica en el eje, alrededor de un núcleo elástico de radio ρ_Y (figura 3.38*c*). En la región plástica el esfuerzo es uniformemente igual a τ_Y, mientras que en el núcleo elástico el esfuerzo varía linealmente con ρ y puede expresarse como

$$\tau = \frac{\tau_Y}{\rho_Y}\rho \tag{3.30}$$

Al aumentar T, la región plástica se expande hasta que, en el límite, la deformación es completamente plástica (figura 3.38*d*).

La ecuación (3.26) será utilizada para determinar el valor del par T correspondiente a un radio dado ρ_Y del núcleo elástico. Recordando que τ está dado por la ecuación (3.30) para $0 \le \rho \le \rho_Y$, y es igual a τ_Y para $\rho_Y \le \rho \le c$, se escribe

$$T = 2\pi \int_0^{\rho_Y} \rho^2 \left(\frac{\tau_Y}{\rho_Y}\rho\right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_Y}^{c} \rho^2 \tau_Y \, d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho_Y^3\tau_Y + \frac{2}{3}\pi c^3\tau_Y - \frac{2}{3}\pi\rho_Y^3\tau_Y$$

$$T = \frac{2}{3}\pi c^3 \tau_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \tag{3.31}$$

o, según la ecuación (3.29),

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \tag{3.32}$$

donde T_Y es el par de torsión máximo elástico. Se advierte que, al acercarse ρ_Y a cero, el par se aproxima al valor limitante

$$T_p = \frac{4}{3}T_Y \tag{3.33}$$

Este valor del par, que corresponde a la deformación completamente plástica (figura 3.38*d*), se llama el *par de torsión plástico* del eje considerado. Note que la ecuación (3.33) es válida sólo para un *eje circular sólido hecho de un material elastoplástico*.

Como la distribución de la *deformación* a través de la sección permanece lineal después del inicio de la cedencia, la ecuación (3.2) sigue siendo válida y puede utilizarse para expresar el radio ρ_Y del núcleo elástico en términos del ángulo de giro ϕ. Si ϕ es suficientemente grande para causar una deformación plástica, el radio ρ_Y del núcleo elástico se obtiene igualando γ

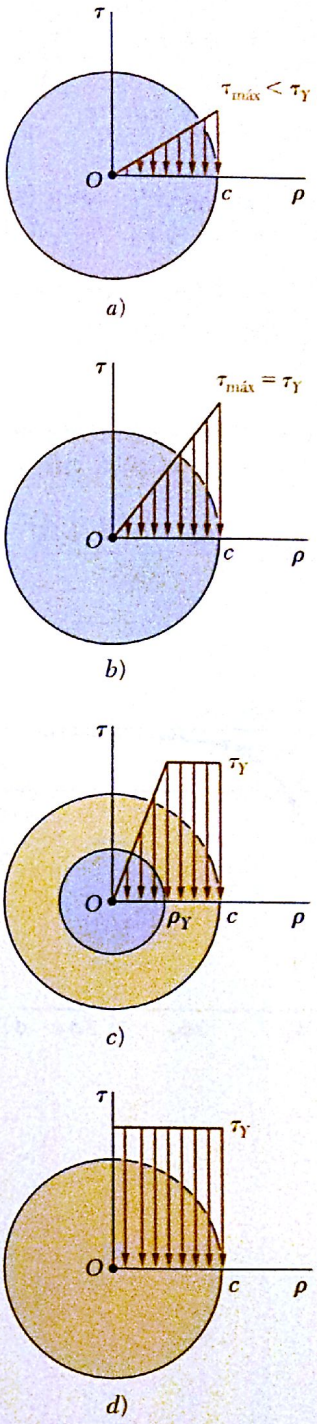


Figura 3.38

igual a la deformación de cedencia γ_Y en la ecuación (3.2) y despejando para el valor correspondiente ρ_Y de la distancia ρ. Se tiene que

$$\rho_Y = \frac{L\gamma_Y}{\phi} \tag{3.34}$$

Sea ϕ_Y el ángulo de giro al inicio de la cedencia, es decir, cuando $\rho_Y = c$. Haciendo a $\phi = \phi_Y$ y a $\rho_Y = c$ en la ecuación (3.34), se tiene que

$$c = \frac{L\gamma_Y}{\phi_Y} \tag{3.35}$$

Dividiendo la ecuación (3.34) entre la (3.35), miembro a miembro, se obtiene la siguiente relación:†

$$\frac{\rho_Y}{c} = \frac{\phi_Y}{\phi} \tag{3.36}$$

Si se introduce la ecuación (3.32) la expresión obtenida para ρ_Y/c, el par T se expresa como función del ángulo de giro ϕ.

$$T = \frac{4}{3}T_Y\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right) \tag{3.37}$$

donde T_Y y ϕ_Y representan, respectivamente, el par y el ángulo de giro al inicio de la cedencia. Observe que la ecuación (3.37) sólo puede emplearse para valores de ϕ mayores que ϕ_Y. Para $\phi < \phi_Y$, la relación entre T y ϕ es lineal y está dada por la ecuación 3.16. Combinando ambas ecuaciones, se obtiene la gráfica de T contra ϕ representada en la figura 3.39. Se verifica que al aumentar ϕ indefinidamente, T se aproxima al valor límite $T_p = \frac{4}{3}T_Y$ correspondiente al caso de una zona plástica completamente desarrollada (figura 3.38*d*). A pesar de que el valor T_p no puede alcanzarse en realidad, se aproxima rápidamente cuando aumenta ϕ. Para $\phi = 2\phi_Y$, T está cerca de 3% de T_p, y para $\phi = 3\phi_Y$, cerca de 1%.

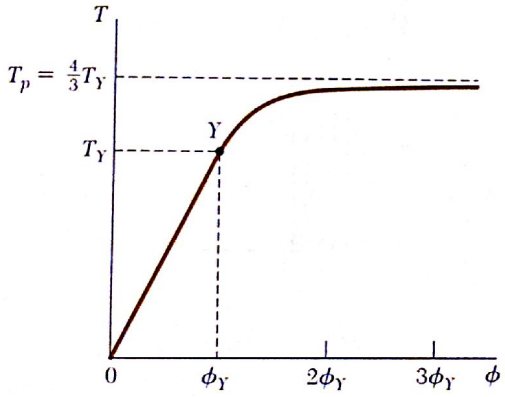


Figura 3.39

Puesto que la gráfica de T contra ϕ obtenida para un material elastoplástico idealizado (figura 3.39) difiere en gran medida del diagrama esfuerzo-deformación a cortante de dicho material (figura 3.37), está claro que el diagrama esfuerzo-deformación a cortante de un material real no puede obtenerse directamente de un ensayo de tensión llevado a cabo en una varilla sólida circular hecha de dicho material. Sin embargo, un diagrama bastante exacto puede obtenerse de un ensayo de torsión si la probeta utilizada incorpora una porción que consista de un tubo circular delgado.‡ De hecho, puede suponerse que el esfuerzo cortante tendrá un valor constante τ en esa porción. La ecuación (3.1) se reduce por lo tanto a

$$T = \rho A\tau$$

donde ρ es el radio promedio del tubo y A el área de su sección transversal. El esfuerzo cortante es, entonces, proporcional al par de torsión, y valores sucesivos de τ pueden calcularse con facilidad de los valores correspondientes de T. Por otra parte, los valores de la deformación a cortante γ pueden obtenerse de la ecuación (3.2) y de los valores de ϕ y L medidos en la porción tubular del espécimen.

† La ecuación (3.36) se aplica a cualquier material dúctil con un punto de cedencia bien definido, ya que su deducción es independiente de la forma del diagrama de esfuerzo-deformación más allá del punto de cedencia.

‡ Para minimizar la posibilidad de falla por pandeo, la probeta deberá ser hecha de tal manera que la longitud de la porción tubular no sea más larga que su diámetro.

EJEMPLO 3.08

Un eje circular sólido de 1.2 m de longitud y 50 mm de diámetro, se sujeta a un par de torsión de 4.60 kN · m en cada extremo (figura 3.40). Suponiendo que el eje es de un material elastoplástico con una resistencia de cedencia al corte de 150 MPa y un módulo de rigidez de 77 GPa, determine *a*) el radio del núcleo elástico, *b*) el ángulo de giro del eje.

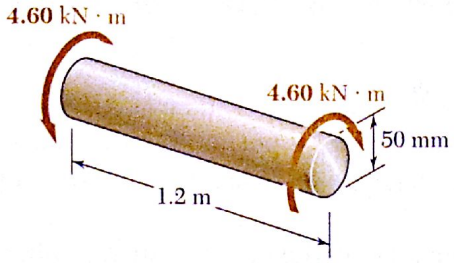


Figura 3.40

a) Radio del núcleo elástico. Primero se determina el par T_Y al inicio de la cedencia. Utilizando la ecuación (3.28) con $\tau_Y = 150$ MPa, $c = 25$ mm y

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(25 \times 10^{-3}\text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

se escribe

$$T_Y = \frac{J\tau_Y}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(150 \times 10^{6}\text{ Pa})}{25 \times 10^{-3}\text{ m}} = 3.68\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Despejando de la ecuación (3.32) el término $(\rho_Y/c)^3$ y sustituyendo los valores de T y de T_Y, se tiene

$$\left(\frac{\rho_Y}{c}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_Y} = 4 - \frac{3(4.60\text{ kN} \cdot \text{m})}{3.68\text{ kN} \cdot \text{m}} = 0.250$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = 0.630 \qquad \rho_Y = 0.630(25\text{ mm}) = 15.8\text{ mm}$$

b) Ángulo de giro. Primero se determina el ángulo de giro ϕ_Y al inicio de la cedencia de la ecuación (3.16):

$$\phi_Y = \frac{T_Y L}{JG} = \frac{(3.68 \times 10^3\text{ N} \cdot \text{m})(1.2\text{ m})}{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(77 \times 10^{9}\text{ Pa})} = 93.4 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

Despejando ϕ de la ecuación (3.36) y sustituyendo los valores obtenidos para ϕ_Y y para ρ_Y/c, se escribe

$$\phi = \frac{\phi_Y}{\rho_Y/c} = \frac{93.4 \times 10^{-3}\text{ rad}}{0.630} = 148.3 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

o

$$\phi = (148.3 \times 10^{-3}\text{ rad})\left(\frac{360^\circ}{2\pi\text{ rad}}\right) = 8.50^\circ$$

*3.11 ESFUERZOS RESIDUALES EN EJES CIRCULARES

En las dos secciones precedentes se estudió que una región plástica se desarrollará en un eje sometido a un par de torsión suficientemente grande, y que el esfuerzo cortante τ en cualquier punto dado de la región plástica puede obtenerse del diagrama de esfuerzo-deformación a cortante de la figura 3.34. Si se retira el par, la reducción de esfuerzo y de deformación unitaria en el punto considerado tendrá lugar a lo largo de una línea recta (figura 3.41). Como se verá posteriormente en esta sección, el valor final del esfuerzo no será, en general, cero, ya que habrá un esfuerzo residual en la mayoría de los puntos, que podrá ser positivo o negativo. Note que, como en el caso del esfuerzo normal, el esfuerzo cortante continuará decreciendo hasta que haya alcanzado un valor igual a su valor máximo en C menos el doble de la resistencia de cedencia del material.

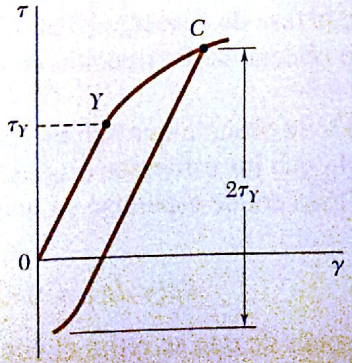


Figura 3.41

Considere otra vez el caso idealizado de un material elastoplástico caracterizado por el diagrama esfuerzo-deformación a cortante de la figura 3.37. Suponiendo que la relación entre τ y γ en cualquier punto del eje permanece lineal mientras el esfuerzo no decrezca por más de $2\tau_Y$, puede utilizarse la ecuación (3.16) para obtener el ángulo en el cual el eje se destuerce al disminuir el par a cero. Como resultado, la descarga del eje será representada por una línea recta en el diagrama T-ϕ (figura 3.42). Observe que el ángulo de giro no regresa a cero después de que se ha retirado el par. De hecho, la carga y descarga del eje resultan en una deformación permanente caracterizada por el ángulo

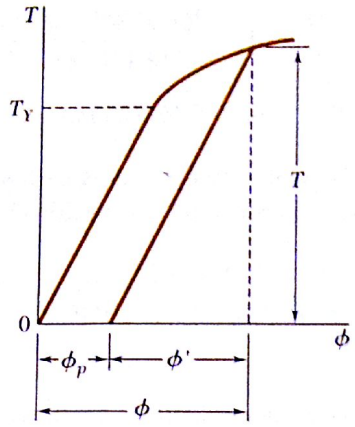


Figura 3.42

$$\phi_p = \phi - \phi' \tag{3.38}$$

donde ϕ corresponde a la fase de carga y puede obtenerse de T al despejar la ecuación (3.38), y donde ϕ' corresponde a la fase de descarga y puede obtenerse de la ecuación (3.16).

Los esfuerzos residuales en un material elastoplástico se obtienen al aplicar el principio de superposición de una manera similar a la descrita en la sección 2.20 para la carga axial. Considere, por una parte, los esfuerzos debidos a la aplicación del par dado **T** y, por otra, los esfuerzos debidos al par igual y opuesto que se aplica para descargar el eje. El primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento elastoplástico del material durante la fase de carga (figura 3.43*a*), y el segundo grupo el comportamiento lineal del mismo material durante la fase de descarga (figura 3.43*b*). Sumando los dos grupos de esfuerzos, se obtiene la distribución de esfuerzos residuales en el eje (figura 3.43*c*).

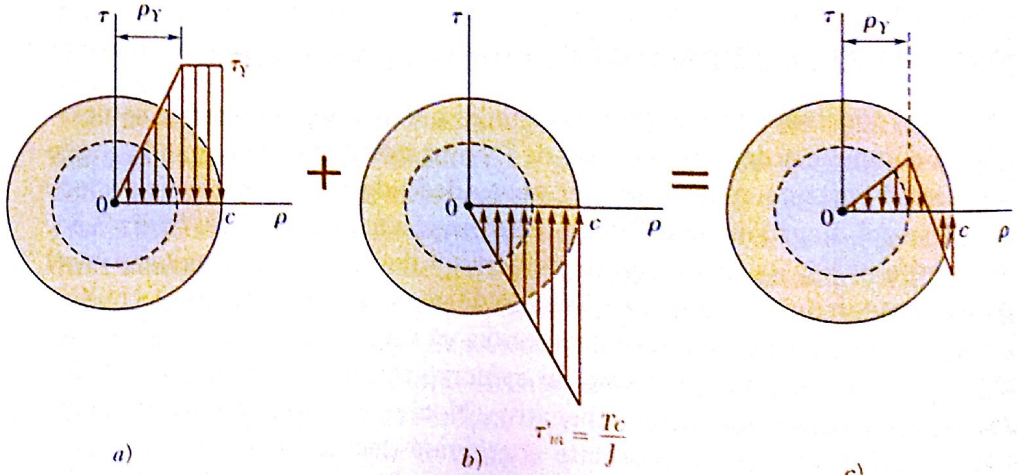


Figura 3.43

En la figura 3.43*c* se observa que algunos de los esfuerzos residuales tienen el mismo sentido que los esfuerzos originales, mientras que otros tienen el sentido opuesto. Esto era de esperarse ya que, de acuerdo con la ecuación (3.1), la relación

$$\int \rho(\tau\, dA) = 0 \tag{3.39}$$

debe verificarse después de que se retira el par.

EJEMPLO 3.09

Para el eje del ejemplo 3.08 determine *a*) el ángulo de torsión permanente, *b*) la distribución de los esfuerzos residuales después de que se ha retirado un par de 4.60 kN · m.

a) Ángulo de torsión permanente. Del ejemplo 3.08, recuerde que el ángulo de giro correspondiente al par dado es $\phi = 8.50°$. El ángulo ϕ' a través del que se destuerce el eje al retirarse el par se obtiene de la ecuación (3.16). Sustituyendo los datos recibidos,

$$T = 4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$L = 1.2 \text{ m}$$

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

y el valor de $J = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ obtenido en la solución del ejemplo 3.08, se tiene que

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$= 116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

o

$$\phi' = (116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 6.69°$$

El ángulo de torsión permanente es, por lo tanto,

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8.50° - 6.69° = 1.81°$$

b) Esfuerzos residuales. Recuerde, del ejemplo 3.08, que la resistencia a la cedencia es $\tau_Y = 150$ MPa y que el radio del núcleo elástico que corresponde al torque dado es $\rho_Y = 15.8$ mm. La distribución de esfuerzos en este eje es, por lo tanto, mostrada en la figura 3.44*a*.

La distribución de esfuerzos debida al par opuesto de 4.60 kN · m requerido para descargar el eje es lineal, como se observa en la figura 3.44*b*. El máximo esfuerzo en la distribución de los esfuerzos inversos se determina de la ecuación (3.9):

$$\tau'_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$= 187.3 \text{ MPa}$$

Superponiendo las dos distribuciones de esfuerzos, se obtienen los esfuerzos residuales ilustrados en la figura 3.44*c*. Se verifica que, aun cuando los esfuerzos inversos excedan la resistencia a la cedencia τ_Y, la suposición de una distribución lineal para estos esfuerzos es válida, ya que no exceden $2\tau_Y$.

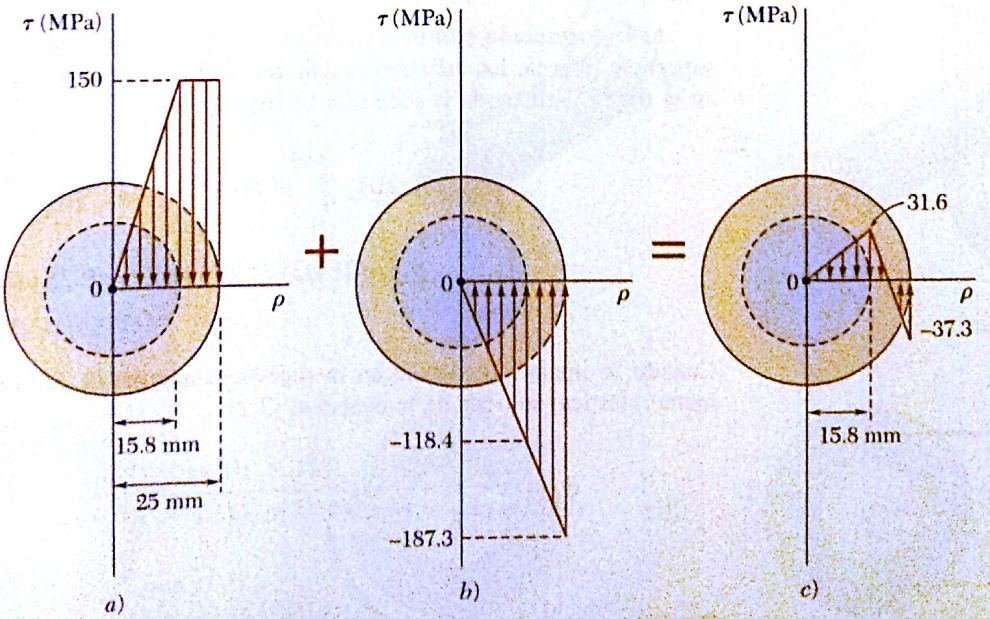
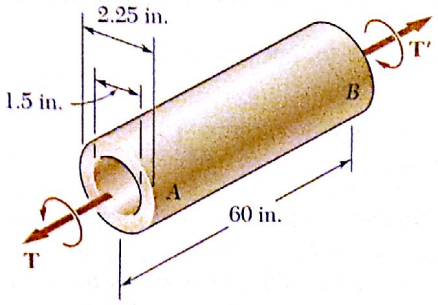
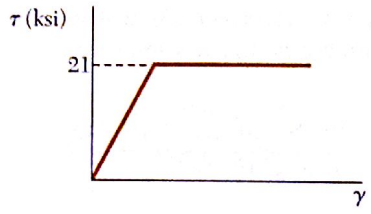


Figura 3.44



PROBLEMA MODELO 3.7

El eje AB es de un acero dulce del que se supone tiene comportamiento elastoplástico con $G = 11.2 \times 10^6$ psi y $\tau_Y = 21$ ksi. Un par **T** se aplica y su magnitud se incrementa gradualmente. Determine la magnitud de **T** y el ángulo de giro correspondiente *a*) cuando ocurre la cedencia, *b*) cuando la deformación es completamente plástica.

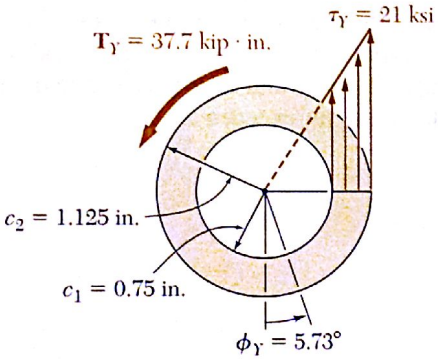


SOLUCIÓN

Propiedades geométricas

Las propiedades geométricas de la sección transversal son

$$c_1 = \tfrac{1}{2}(1.5 \text{ in.}) = 0.75 \text{ in.} \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}(2.25 \text{ in.}) = 1.125 \text{ in.}$$
$$J = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi[(1.125 \text{ in.})^4 - (0.75 \text{ in.})^4] = 2.02 \text{ in.}^4$$



***a*) Inicio de la cedencia.** Para $\tau_{\text{máx}} = \tau_Y = 21$ ksi, se encuentra

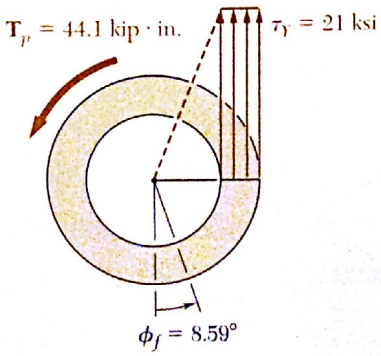
$$T_Y = \frac{\tau_Y J}{c_2} = \frac{(21 \text{ ksi})(2.02 \text{ in.}^4)}{1.125 \text{ in.}}$$

$$T_Y = 37.7 \text{ kip} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

Haciendo $\rho = c_2$ y $\gamma = \gamma_Y$ en la ecuación (3.2) y despejando ϕ, se obtiene el valor de ϕ_Y:

$$\phi_Y = \frac{\gamma_Y L}{c_2} = \frac{\tau_Y L}{c_2 G} = \frac{(21 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in.})}{(1.125 \text{ in.})(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.100 \text{ rad}$$

$$\phi_Y = 5.73° \blacktriangleleft$$



***b*) Deformación completamente plástica.** Cuando la zona plástica alcanza la superficie interna, los esfuerzos están distribuidos uniformemente como se muestra en la figura. Utilizando la ecuación (3.16), se escribe

$$T_p = 2\pi\tau_Y \int_{c_1}^{c_2} \rho^2 \, d\rho = \tfrac{2}{3}\pi\tau_Y(c_2^3 - c_1^3)$$

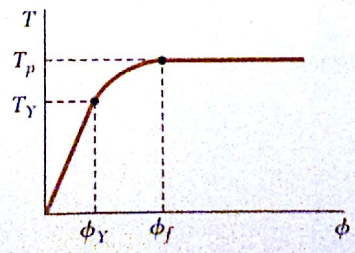
$$= \tfrac{2}{3}\pi(21 \text{ ksi})[(1.125 \text{ in.})^3 - (0.75 \text{ in.})^3]$$

$$T_p = 44.1 \text{ kip} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

Cuando se inicia la cedencia en la superficie interna, la deformación es completamente plástica; se tiene de la ecuación (3.2):

$$\phi_f = \frac{\gamma_Y L}{c_1} = \frac{\tau_Y L}{c_1 G} = \frac{(21 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in.})}{(0.75 \text{ in.})(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.150 \text{ rad}$$

$$\phi_f = 8.59° \blacktriangleleft$$



Para ángulos mayores de giro el par de torsión permanece constante; el diagrama T-ϕ del eje es como se muestra en la figura.

PROBLEMA MODELO 3.8

Para el eje del problema modelo 3.7, determine los esfuerzos residuales y el ángulo de giro permanente después de que el par $T_P = 44.1$ kip · in. ha sido retirado.

SOLUCIÓN

Al abordar el problema modelo 3.7, recuerde que se observa que cuando la zona plástica alcanzó la superficie interna, el par aplicado era $T_P = 44.1$ kip · in. y el ángulo de giro correspondiente era $\phi_f = 8.59°$. Estos valores se muestran en la figura 1.

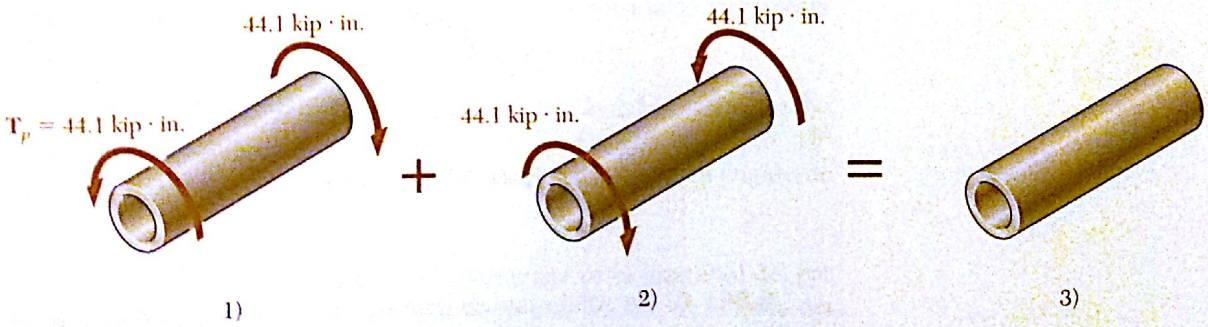
Descarga elástica. El eje se descarga aplicando un par de 44.1 kip · in. en el sentido mostrado en la figura 2. Durante esta descarga, el comportamiento del material es lineal. Recordando del problema modelo 3.7 los valores encontrados para c_1, c_2 y J, se obtienen los siguientes esfuerzos y ángulo de giro:

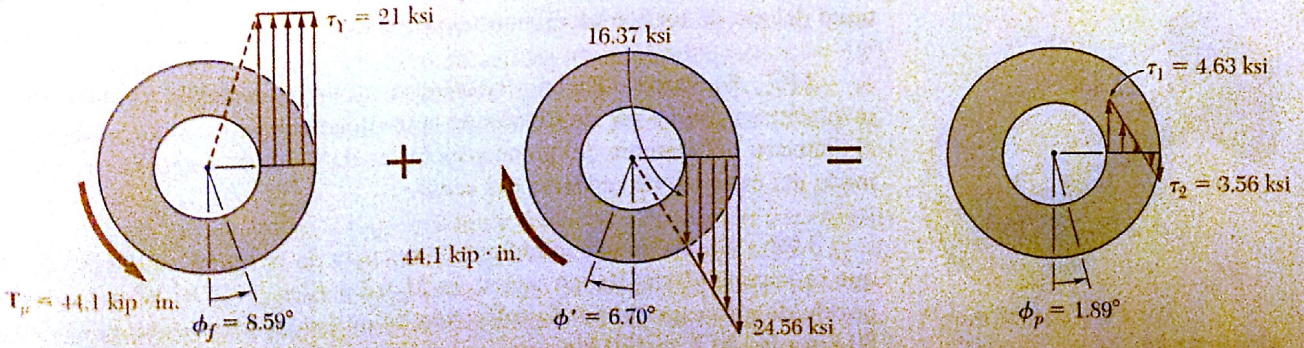
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} = \frac{(44.1 \text{ kip} \cdot \text{in.})(1.125 \text{ in.})}{2.02 \text{ in.}^4} = 24.56 \text{ ksi}$$

$$\tau_{\text{mín}} = \tau_{\text{máx}} \frac{c_1}{c_2} = (24.56 \text{ ksi}) \frac{0.75 \text{ in.}}{1.125 \text{ in.}} = 16.37 \text{ ksi}$$

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(44.1 \times 10^3 \text{ psi})(60 \text{ in.})}{(2.02 \text{ in.}^4)(11.2 \times 10^6 \text{ psi})} = 0.1170 \text{ rad} = 6.70°$$

Esfuerzos residuales y ángulo de torsión permanente. Los resultados de la carga (figura 1) y de la descarga (figura 2) se superponen (figura 3) para obtener los esfuerzos residuales y el ángulo de torsión permanente ϕ_p.





PROBLEMAS

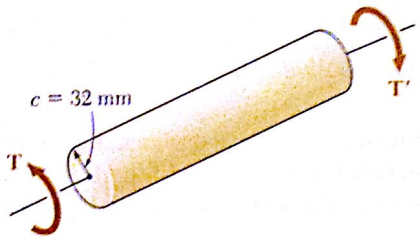


Figura P3.92

3.92 El eje circular sólido que se muestra en la figura es de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 145$ MPa. Determine la magnitud T del par de torsión aplicado cuando la zona plástica tiene una profundidad de *a*) 16 mm, *b*) 24 mm.

3.93 Una varilla sólida de 1.25 in. de diámetro es de un material elastoplástico con $\tau_y = 5$ ksi. Si se sabe que el núcleo elástico de la varilla tiene un diámetro de 1 in., determine la magnitud del par de torsión aplicado a la varilla.

3.94 Un eje sólido de 2 in. de diámetro está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_y = 20$ ksi. Determine el esfuerzo cortante máximo y el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión de magnitud *a*) 30 kip · in., *b*) 40 kip · in.

3.95 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $G = 77.2$ GPa y $\tau_y = 145$ MPa. Determine el esfuerzo cortante máximo y el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 600$ N · m, *b*) $T = 1\,000$ N · m.

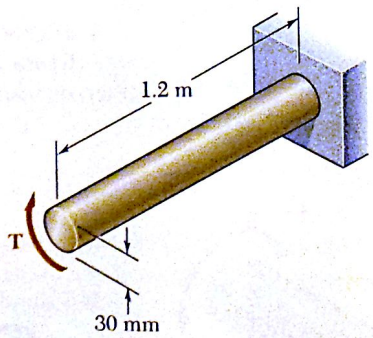


Figura *P3.95* y P3.96

3.96 El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_y = 145$ MPa. Determine el radio del núcleo elástico causado por la aplicación de un par de torsión igual a 1.1 T_y donde T_y es la magnitud del par de torsión en el punto de cedencia.

3.97 Se observa que un prensapapeles (clip) enderezado puede torcerse varias revoluciones con un par de torsión de aproximadamente 60 mN · m. Si se sabe que el diámetro del alambre del prensapapeles es de 0.9 mm, determine el valor aproximado del esfuerzo de cedencia del acero.

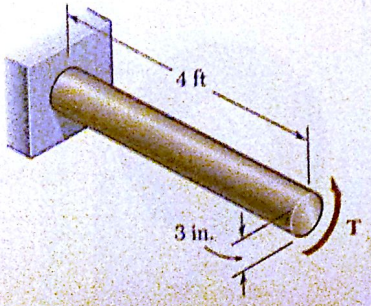


Figura P3.98

3.98 El eje circular sólido que se muestra en la figura está hecho de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Determine el ángulo de giro causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T =$ 80 kip · in., *b*) $T = 130$ kip · in.

3.99 Para el eje circular sólido del problema 3.95, determine el ángulo de giro causado por la aplicación de un par de torsión con magnitud *a*) $T = 600$ N · m, *b*) $T = 1\,000$ N · m.

3.100 El eje AB está hecho de un material que es elastoplástico con $\tau_y = 90$ MPa y $G = 30$ GPa. Para la carga mostrada, determine *a*) el radio del núcleo elástico del eje, *b*) el ángulo de giro en el extremo B.

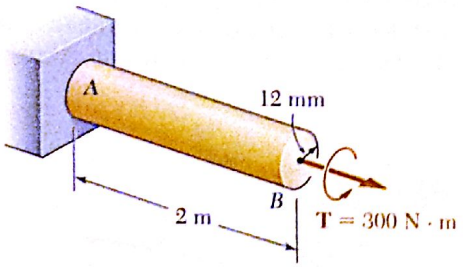


Figura P3.100

3.101 Un eje circular sólido de 1.25 in. de diámetro está hecho de un material que se supone elastoplástico con $\tau_y = 18$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Para un tramo del eje de 8 ft de longitud, determine el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de giro causados por un par de torsión de 7.5 kip · in.

3.102 Un eje circular sólido de 0.75 in. de diámetro está hecho de un material que se supone elastoplástico con $\tau_y = 20$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Para un tramo del eje de 4 ft de longitud, encuentre el máximo esfuerzo cortante y el ángulo de giro causado por un par de torsión de 1 800 lb · in.

3.103 Una varilla circular sólida está hecha de un material que se supone elastoplástico. Si T_y y ϕ_y son, respectivamente, el par de torsión y el ángulo de giro al inicio de la cedencia, determine el ángulo de giro si el par de torsión se incrementa a *a*) $T = 1.1\ T_y$, *b*) $T = 1.25\ T_y$, *c*) $T = 1.3\ T_y$.

3.104 Un eje sólido de 3 ft de largo tiene un diámetro de 2.5 in. y está hecho de un acero dulce que se supone elastoplástico con $\tau_y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Determine el par de torsión requerido para girar el eje a través de un ángulo de *a*) 2.5°, *b*) 5°.

3.105 Para el eje sólido del problema 3.95, determine *a*) la magnitud del par de torsión T requerido para girar el eje a través de un ángulo de 15°, *b*) el radio del núcleo elástico correspondiente.

3.106 Un eje hueco de acero tiene 0.9 m de longitud y tiene la sección transversal que se muestra en la figura. El acero se supone elastoplástico con $\tau_y = 180$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Determine el par de torsión aplicado y el correspondiente ángulo de giro *a*) al inicio de la cedencia, *b*) cuando la zona plástica tiene 10 mm de profundidad.

3.107 Un eje hueco de acero tiene 0.9 m de longitud y la sección transversal que muestra la figura. El acero se supone elastoplástico con $\tau_y = 180$ MPa y $G = 77.2$ GPa. Determine *a*) el ángulo de giro para el que la sección se convierte completamente en plástica, *b*) la magnitud correspondiente del par de torsión aplicado.

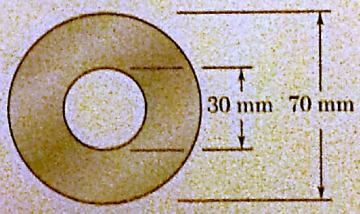


Figura P3.106 y P3.107

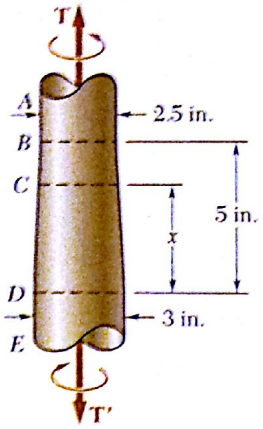


Figura P3.108

3.108 Una varilla de acero se maquina en la forma que se muestra en la figura para formar un eje sólido ahusado, al cual se le aplican pares de torsión con magnitud $T = 75$ kip · in. Se supone que el acero es elástico con $\tau_y = 21$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el radio del núcleo plástico en la porción *AB* del eje, *b*) la longitud de la porción *CD* que permanece completamente elástica.

3.109 Si la magnitud de los pares de torsión aplicados al eje ahusado del problema 3.108 se incrementa lentamente, determine *a*) la magnitud *T* de los pares máximos que pueden aplicarse al eje, *b*) la longitud de la porción *CD* que permanece completamente elástica.

3.110 Con el diagrama esfuerzo-deformación que se muestra en la figura, calcule *a*) el par de torsión que causa un momento cortante máximo de 15 ksi en una varilla sólida de 0.8 in. de diámetro, *b*) el ángulo de giro correspondiente en un tramo de 20 in. de la varilla.

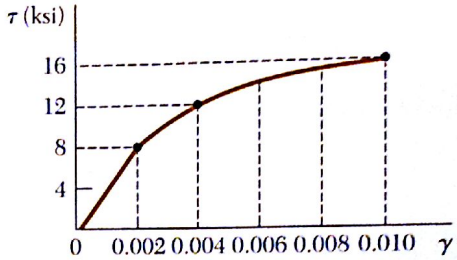


Figura *P3.110* y *P3.111*

3.111 Un eje hueco con diámetros exterior e interior iguales a 0.6 in. y 0.2 in., respectivamente, se fabrica de una aleación de aluminio cuyo diagrama esfuerzo-deformación se indica en el esquema. Determine el par de torsión requerido para torcer un tramo de 9 in. del eje un ángulo de 10°.

3.112 Una varilla sólida de aluminio con 40 mm de diámetro se somete a un par de torsión que produce en la varilla una deformación cortante máxima de 0.008. Con el diagrama τ-γ que se muestra en la figura para la aleación de aluminio empleada, determine *a*) la magnitud del par de torsión aplicado a la varilla, *b*) el ángulo de giro en un tramo de la varilla de 750 mm de longitud.

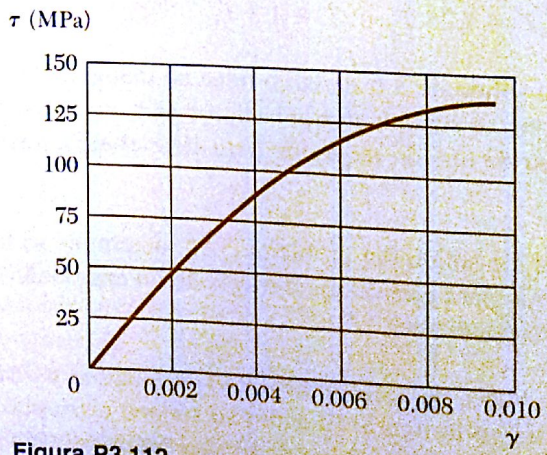


Figura P3.112

3.113 La curva que se muestra en la figura P3.112 puede aproximarse mediante la relación

$$\tau = 27.8 \times 10^9 \gamma - 1.390 \times 10^{12} \gamma^2$$

Utilizando esta relación y las ecuaciones (3.2) y (3.26), resuelva el problema 3.112.

3.114 La varilla perforadora circular AB está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 22$ ksi y $G = 11.2 \times 10^6$ psi. Si se sabe que a la varilla se le aplica un par de torsión con $T = 75$ kip · in. y después se retira, determine el esfuerzo cortante residual máximo en la varilla.

3.115 En el problema 3.114, determine el ángulo de giro permanente de la varilla.

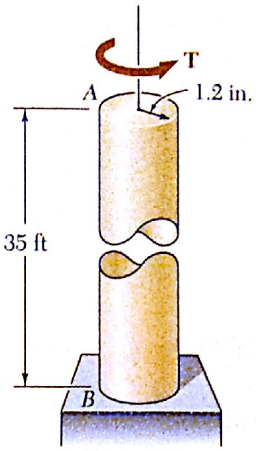


Figura P3.114

3.116 El eje hueco que se muestra en la figura está hecho de acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 145$ MPa y $G = 77.2$ GPa. La magnitud T de los pares de torsión se incrementa lentamente hasta el momento en que la zona plástica alcanza la superficie interna del eje, entonces los pares de torsión se retiran. Determine la magnitud y ubicación del esfuerzo cortante residual máximo en la varilla.

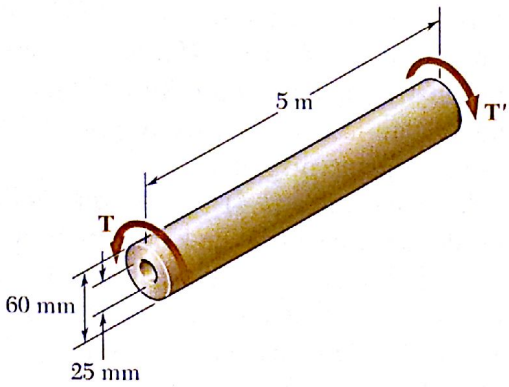


Figura *P3.116*

3.117 En el problema 3.116, determine el ángulo de giro permanente de la varilla.

3.118 El eje sólido que se muestra en la figura es de un acero que se supone elastoplástico con $\tau_y = 145$ MPa y $G = 77.2$ GPa. El par de torsión se incrementa en magnitud hasta que el eje ha sido torcido a 6°; después se retira el par de torsión. Determine *a*) la magnitud y localización del esfuerzo cortante residual máximo, *b*) el ángulo de giro permanente.

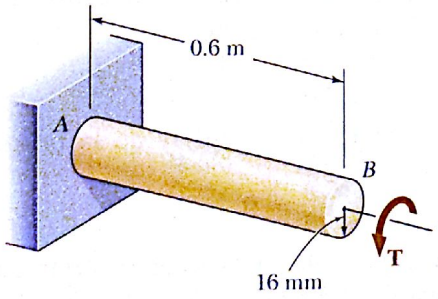


Figura P3.118

3.119 Un par de torsión **T** aplicado a una varilla sólida, hecha de un material elastoplástico, se incrementa hasta que la varilla se vuelve completamente plástica, y entonces se retira. *a*) Muestre que la distribución de esfuerzos residuales es como se representa en la figura. *b*) Determine la magnitud del par de torsión debida a los esfuerzos que actúan en la porción de la varilla localizada dentro de un círculo de radio c_0.

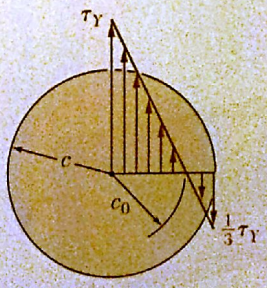


Figura P3.119

3.120 Después de que el eje sólido del problema 3.118 se ha cargado y descargado como se describe en dicho problema, se aplica un par de torsión $\mathbf{T}_1$ con sentido opuesto al par de torsión original **T** que se aplicó al eje. Suponga que no hay cambio en el valor de ϕ_Y y determine el ángulo de giro ϕ_1 para el que se inicia la cedencia en esta segunda carga y compárela con el ángulo ϕ_Y en el que el eje comenzó a ceder en la carga original.

*3.12 TORSIÓN DE ELEMENTOS NO CIRCULARES

Las fórmulas obtenidas en las secciones 3.3 y 3.4 para las distribuciones de deformación y de esfuerzo bajo una carga torsional se aplican sólo a elementos con sección transversal circular. De hecho, su deducción se basó en la suposición de que la sección transversal del elemento permaneció plana y sin distorsionar, y se vio en la sección 3.3 que la validez de esta suposición depende de la *simetría axial* del elemento, es decir, sobre el hecho de que su apariencia permanece constante cuando se ve desde una posición fija y se gira alrededor de su eje un ángulo arbitrario.

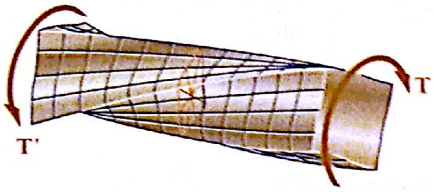


Figura 3.45

Una barra cuadrada, por el contrario, retiene la misma apariencia sólo si se gira 90° o 180°. Siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la sección 3.3, podría mostrarse que las diagonales de la sección transversal cuadrada de la barra y las líneas que unen los puntos medios de los lados de dicha sección permanecen rectas (figura 3.45). Sin embargo, debido a la falta de simetría axial de la barra, cualquier otra línea dibujada en su sección transversal se deformará cuando la barra se tuerza, y la sección transversal misma se torcerá fuera de su plano original.

Se deduce que las ecuaciones (3.4) y (3.6), que definen respectivamente las distribuciones de deformación y de esfuerzo en un eje circular elástico no pueden utilizarse para elementos no circulares. Por ejemplo, sería erróneo suponer que el esfuerzo cortante en la sección transversal de una barra cuadrada varía linealmente con la distancia desde el eje de la barra y que es, por lo tanto, mayor en las esquinas de la sección transversal. Como se verá en seguida, el esfuerzo cortante en realidad es cero en estos puntos.

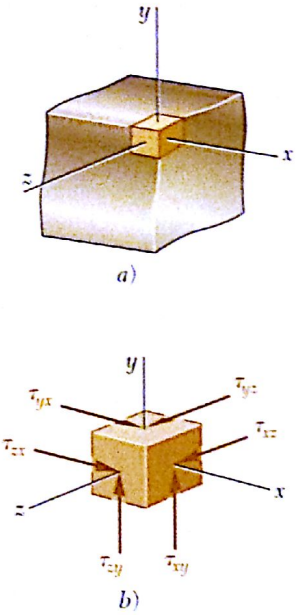


Figura 3.46

Considere un pequeño elemento cúbico ubicado en una esquina de la sección transversal de una barra cuadrada en torsión y seleccione los ejes coordenados paralelos a los bordes del elemento (figura 3.46*a*). Como la cara del elemento perpendicular al eje *y* es parte de la superficie libre de la barra, todos los esfuerzos en esta cara deben ser cero. Con referencia a la figura 3.46*b*, se escribe

$$\tau_{yx} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0 \tag{3.40}$$

Por la misma razón, todos los esfuerzos en la cara del elemento perpendicular al eje *z* deben ser cero, y se escribe

$$\tau_{zx} = 0 \qquad \tau_{zy} = 0 \tag{3.41}$$

De la primera de las ecuaciones (3.40) y de la primera de las ecuaciones (3.41), sigue que

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \tag{3.42}$$

Por lo tanto, ambas componentes del esfuerzo cortante en la cara del elemento perpendicular al eje de la barra son cero. Se concluye que no hay esfuerzo cortante en las esquinas de la sección transversal de la barra.

Torciendo un modelo de caucho de una barra cuadrada, se verifica fácilmente que no ocurren deformaciones —y, por lo tanto, tampoco esfuerzos— a lo largo de los bordes de la barra, mientras que las deformaciones máximas —y, por lo tanto, los esfuerzos máximos— ocurren a lo largo de la línea central de cada una de las caras de la barra (figura 3.47).

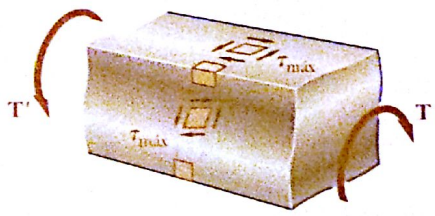


Figura 3.47

La determinación de los esfuerzos en elementos no circulares sujetos a carga torsional está más allá del alcance de este libro. No obstante, los resultados obtenidos de la teoría matemática de la elasticidad para barras rectas con *sección transversal rectangular uniforme* se indicará aquí por conveniencia.†

† Véase S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1969, sección 109.

Denotando con L la longitud de la barra, con a y b, respectivamente, el lado más ancho y el más angosto de su sección transversal y con T la magnitud de los pares de torsión aplicados a la barra (figura 3.48), se encuentra que el

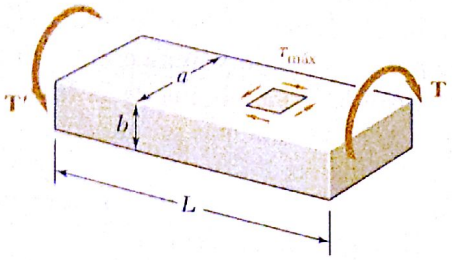


Figura 3.48

máximo esfuerzo cortante ocurre a lo largo de la línea central de la cara *más ancha* de la barra y es igual a

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{c_1 ab^2} \tag{3.43}$$

El ángulo de giro, por otro lado, puede expresarse por

$$\phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G} \tag{3.44}$$

Los coeficientes c_1 y c_2 dependen sólo de la razón a/b y se dan en la tabla 3.1 para una cantidad de valores de dicha razón. Note que las ecuaciones (3.43) y (3.44) son válidas sólo dentro del rango elástico.

TABLA 3.1 Coeficientes para barras rectangulares en torsión

a/b	c_1	c_2
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

Se observa de la tabla 3.1 que para $a/b \geq 5$, los coeficientes c_1 y c_2 son iguales. Puede demostrarse que para tales valores de a/b, se tiene que

$$c_1 = c_2 = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630b/a) \qquad \textit{(para } a/b \geq 5 \textit{ solamente)} \tag{3.45}$$

La distribución de esfuerzos cortantes en un elemento no circular puede visualizarse con mayor facilidad utilizando la *analogía de la membrana*. Una membrana elástica homogénea unida a un marco fijo y sometida a una presión uniforme en uno de sus lados constituye un *análogo* de una barra en torsión, esto es, la determinación de la deformación de la membrana depende

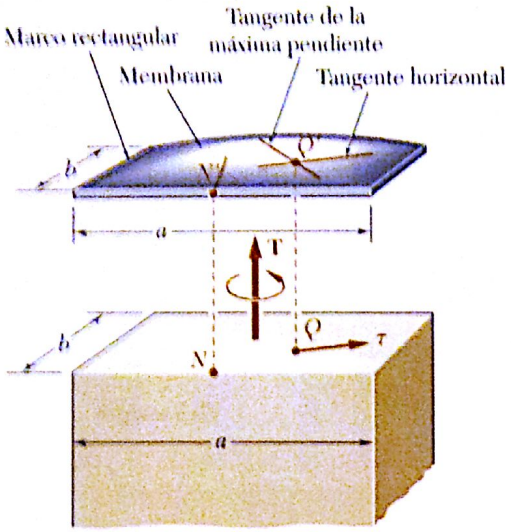


Figura 3.49

de la solución de la misma ecuación diferencial parcial que la determinación de los esfuerzos cortantes en la barra.† Más específicamente, si Q es un punto de la sección transversal de la barra y Q' el punto correspondiente de la membrana (figura 3.49), el esfuerzo cortante τ en Q tendrá la misma dirección que la tangente horizontal a la membrana en Q' y su magnitud será proporcional al máximo de pendiente de la membrana Q'.‡ Además, el par de torsión aplicado será proporcional al volumen entre la membrana y el plano del marco fijo. En el caso de la membrana de la figura 3.49, que está unida a un marco rectangular, la pendiente más pronunciada ocurre en el punto medio N' del lado mayor del marco. Por lo tanto, se verifica que el máximo esfuerzo cortante en una barra de sección transversal rectangular ocurrirá en el punto medio N del lado mayor de la sección.

La analogía de la membrana también puede usarse con eficacia para visualizar los esfuerzos cortantes en cualquier barra de sección transversal uniforme no circular. En particular, considere varios elementos de pared delgada con las secciones transversales que se muestran en la figura 3.50, que están sujetos al mismo par de torsión. Utilizando la analogía de la membrana como ayuda para visualizar los esfuerzos cortantes, se advierte que, ya que el mismo par se aplica a cada elemento, el mismo volumen estará localizado bajo cada membrana, y la máxima pendiente será casi la misma en cada caso. Así, para un elemento de pared delgada de espesor uniforme y forma arbitraria, el máximo esfuerzo cortante es el mismo que para una barra rectangular con un valor muy grande de a/b y puede ser determinado de la ecuación (3.43) con $c_1 = 0.333$.§

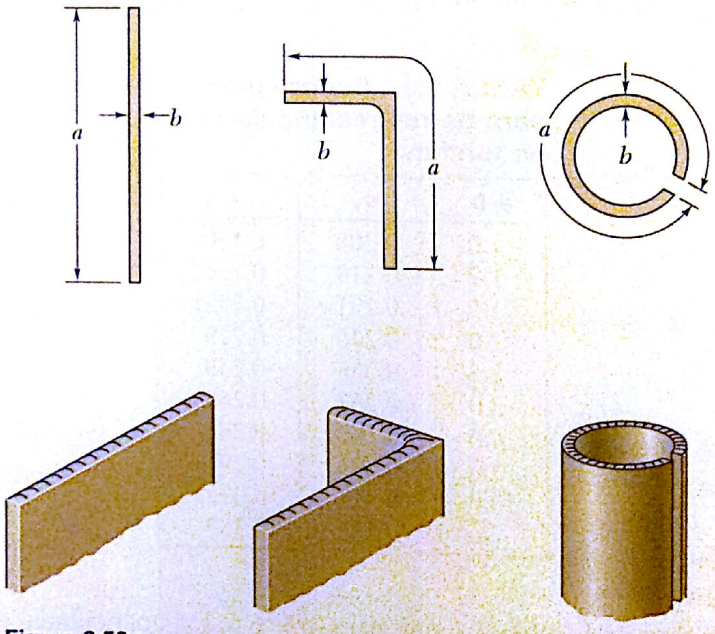


Figura 3.50

† *Ibid.* Véase sección 107.

‡ Ésta es la pendiente medida en una dirección perpendicular a la tangente horizontal en Q'.

§ También pudo haberse mostrado que el ángulo de giro puede determinarse con la ecuación (3.44) con $c_2 = 0.333$.

*3.13 EJES HUECOS DE PARED DELGADA

En la sección anterior se vio que la determinación de esfuerzos en elementos no circulares generalmente requiere del uso de métodos matemáticos avanzados. En el caso de ejes huecos no circulares de pared delgada, sin embargo, puede obtenerse una buena aproximación de la distribución de esfuerzos en el eje por medio de un cálculo sencillo.

Considere un elemento cilíndrico hueco con sección *no circular* sujeto a una carga torsional (figura 3.51).† A pesar de que el espesor t de la pared puede variar dentro de una sección transversal, se supondrá que permanece pequeño en comparación con las demás dimensiones del elemento. Ahora se desprende del elemento la porción coloreada de pared AB limitada por los dos planos a una distancia mutua Δx, y por dos planos longitudinales perpendiculares a la pared. Como la porción AB está en equilibrio, la suma de las fuerzas ejercidas sobre ella en la dirección longitudinal x debe ser cero (figura 3.52). Pero las únicas fuerzas involucradas son las fuerzas cortantes $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ ejercidas sobre los extremos de la porción AB. Se tiene por lo tanto

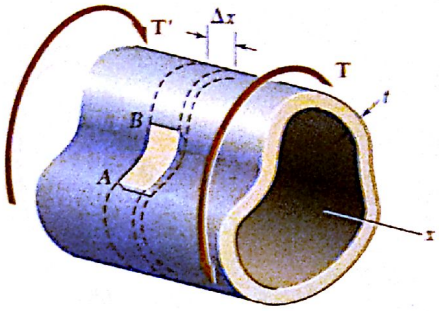


Figura 3.51

$$\Sigma F_x = 0: \qquad F_A - F_B = 0 \tag{3.46}$$

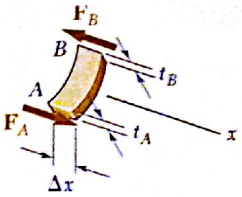


Figura 3.52

Ahora se expresa F_A como el producto de esfuerzo cortante longitudinal τ_A sobre la cara pequeña en A y del área $t_A\,\Delta x$ de dicha cara:

$$F_A = \tau_A(t_A\,\Delta x)$$

Note que, a pesar de que el esfuerzo cortante es independiente de la coordenada x del punto considerado, puede variar a través de la pared; por lo tanto, τ_A representa el valor promedio del esfuerzo calculado a través de la pared. Expresando F_B de manera similar y sustituyendo F_A y F_B en la ecuación (3.46), se escribe

$$\tau_A(t_A\,\Delta x) - \tau_B(t_B\,\Delta x) = 0$$

o

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B \tag{3.47}$$

Ya que A y B se escogieron en forma arbitraria, la ecuación (3.47) expresa que el producto τt del esfuerzo cortante longitudinal τ y del espesor de la pared es una constante t a través del elemento. Denotando este producto con q, se tiene que

$$q = \tau t = \text{constante} \tag{3.48}$$

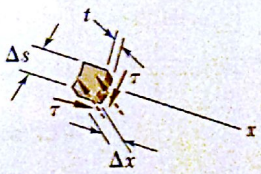


Figura 3.53

Ahora se desprende un pequeño elemento de la porción AB de la pared (figura 3.53). Como las caras superior e inferior de este elemento son parte de la superficie libre del miembro hueco, los esfuerzos en estas caras son iguales a cero. De las ecuaciones (1.21) y (1.22) de la sección 1.12, se tiene que las componentes de esfuerzo indicadas en las otras caras por flechas punteadas son también cero, en tanto que las representadas por flechas sólidas son iguales. Así, el esfuerzo cortante en cualquier punto de un corte transversal del miembro hueco es paralelo a la superficie de la pared (figura 3.54) y su valor promedio calculado a través de la pared satisface la ecuación (3.48).

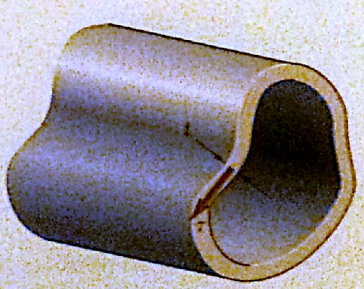


Figura 3.54

† La pared del elemento debe encerrar una sola cavidad y no debe estar ranurada. En otras palabras, el elemento deberá ser topológicamente equivalente a un eje circular hueco.

En este punto puede advertirse una analogía entre la distribución de los esfuerzos cortantes τ en el corte transversal de un eje hueco de pared delgada y la distribución de las velocidades v en agua que fluye en un canal cerrado de profundidad unitaria y de ancho variable. A pesar de que la velocidad v del agua varía de un punto a otro dependiendo de la variación del ancho t del canal, la tasa de flujo, $q = vt$, permanece constante en el canal, del mismo modo que τt en la ecuación (3.48). Debido a esta analogía, el producto $q = \tau t$ se conoce como el *flujo de corte* en la pared del eje hueco.

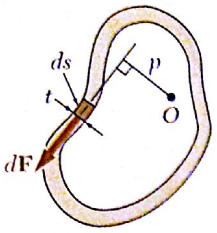


Figura 3.55

Ahora se deducirá una relación entre el par de torsión T aplicado a un miembro hueco y el flujo de corte q en su pared. Considere un pequeño elemento de la sección de la pared, de longitud ds (figura 3.55). El área del elemento es $dA = t\,ds$, y la magnitud de la fuerza cortante $d\mathbf{F}$ ejercida sobre el elemento es

$$dF = \tau\,dA = \tau(t\,ds) = (\tau t)\,ds = q\,ds \tag{3.49}$$

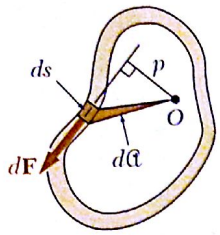


Figura 3.56

El momento dM_O de esta fuerza alrededor de un punto arbitrario O dentro de la cavidad del miembro puede obtenerse al multiplicar dF por la distancia perpendicular p desde O hasta la línea de acción de $d\mathbf{F}$. Se tiene

$$dM_O = p\,dF = p(q\,ds) = q(p\,ds) \tag{3.50}$$

Pero el producto $p\,ds$ es igual al doble del área $d\mathcal{A}$ del triángulo sombreado de la figura 3.56. Se tiene, pues, que

$$dM_O = q(2d\mathcal{A}) \tag{3.51}$$

Como la integral alrededor de la sección de la pared del miembro izquierdo de la ecuación (3.51) representa la suma de los momentos de todas las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la sección de pared, y ya que esta suma es igual al par T aplicado al miembro hueco, se tiene que

$$T = \oint dM_O = \oint q(2d\mathcal{A})$$

Puesto que el flujo de corte q es una constante, se escribe

$$T = 2q\mathcal{A} \tag{3.52}$$

donde $\mathcal{A}$ es el área bordeada por la línea central de la sección transversal de la pared (figura 3.57).

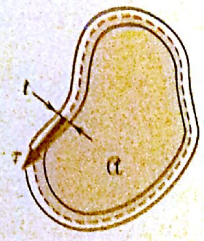


Figura 3.57

El esfuerzo cortante τ en cualquier punto dado de la pared puede expresarse en términos del par T si se sustituye q de la ecuación (3.48) en la ecuación (3.52) y se despeja τ de la ecuación obtenida. Se tiene que

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \tag{3.53}$$

donde t es el espesor de la pared en el punto considerado y $\mathcal{A}$ es el área bordeada por la línea central. Recuerde que τ representa el valor promedio del

esfuerzo cortante a través de la pared. Sin embargo, para deformaciones elásticas la distribución de esfuerzos a través de la pared puede considerarse uniforme y la ecuación (3.53) dará el valor real del esfuerzo cortante en un punto dado de la pared.

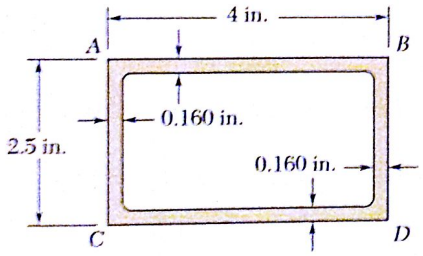
El ángulo de giro de un eje hueco de pared delgada puede obtenerse utilizando el método de energía (véase capítulo 11). Suponiendo una deformación elástica, puede mostrarse† que el ángulo de giro de un eje de pared delgada de longitud L y módulo de rigidez G es

$$\phi = \frac{TL}{4(t^2)G}\oint\frac{ds}{t} \tag{3.54}$$

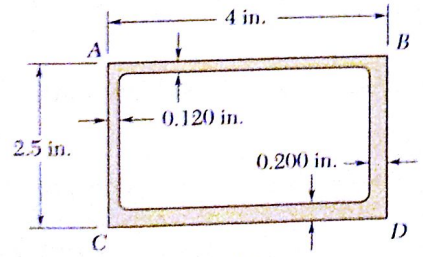
donde la integral se calcula a lo largo de la línea central de la sección de la pared.

EJEMPLO 3.10

Se fabricó por extrusión un tubo cuadrado de aluminio estructural con una sección transversal de 2.5 × 4 in. Determine el esfuerzo cortante en cada una de las cuatro paredes de una porción de dicho tubo cuando se somete a un par de torsión de 24 kip · in., suponiendo *a)* un espesor uniforme de la pared de 0.160 in. (figura 3.58*a*), *b)* que, como resultado de una fabricación defectuosa, las paredes AB y AC son de 0.120 in. de espesor y las paredes BD y CD son de 0.200 in. de espesor (figura 3.58*b*).



a)



b)

Figura 3.58

a) Tubo de espesor uniforme de pared. El área bordeada por la línea central (figura 3.59) es

$$A = (3.84 \text{ in.})(2.34 \text{ in.}) = 8.986 \text{ in.}^2$$

Ya que el espesor de cada una de las cuatro paredes es $t = 0.160$ in., se encuentra de la ecuación (3.53) que el esfuerzo cortante en cada pared es

$$\tau = \frac{T}{2At} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{2(0.160 \text{ in.})(8.986 \text{ in}^2)} = 8.35 \text{ ksi}$$

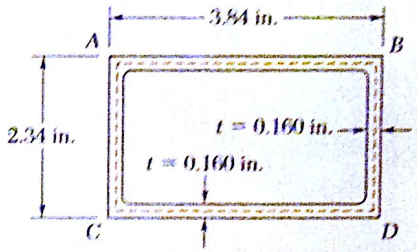


Figura 3.59

b) Tubo con espesor variable de pared. Observando que el área A bordeada por la línea central es la misma que en la parte *a*, y sustituyendo sucesivamente $t = 0.120$ in. y $t = 0.200$ in. en la ecuación (3.53), se tiene

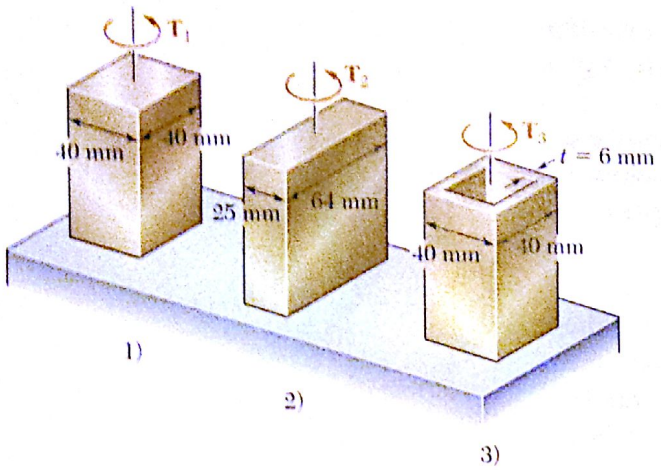
$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{2(0.120 \text{ in.})(8.986 \text{ in}^2)} = 11.13 \text{ ksi}$$

y

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{24 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{2(0.200 \text{ in.})(8.986 \text{ in}^2)} = 6.68 \text{ ksi}$$

Se advierte que el esfuerzo en una pared dada depende sólo de su espesor.

† Vea el problema 11.70.



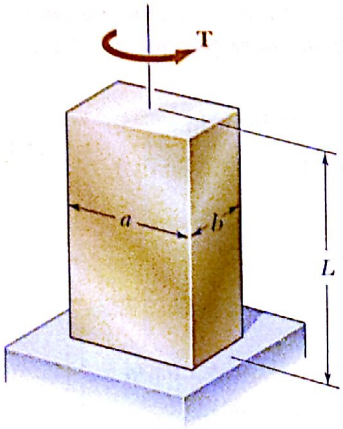
PROBLEMA MODELO 3.9

Utilizando $\tau_{perm} = 40$ MPa, determine el par máximo de torsión que puede aplicarse a cada una de las barras de latón y al tubo de latón que se muestran en la figura. Note que las dos barras sólidas tienen la misma área de sección transversal, y que la barra cuadrada y el tubo cuadrado tienen las mismas dimensiones externas.

SOLUCIÓN

1. Barra con sección transversal cuadrada. Para una barra sólida de sección transversal rectangular el máximo esfuerzo cortante está dado por la ecuación (3.43)

$$\tau_{máx} = \frac{T}{c_1 ab^2}$$



donde el coeficiente c_1 se obtiene de la tabla 3.1 en la sección 3.12. Se tiene

$$a = b = 0.040 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 1.00 \qquad c_1 = 0.208$$

Para $\tau_{máx} = \tau_{perm} = 40$ MPa, se tiene

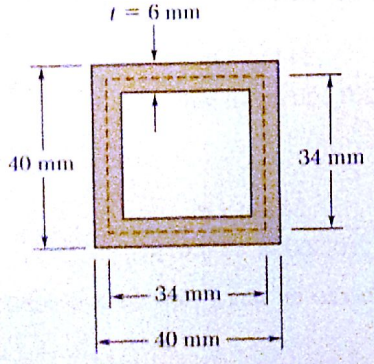
$$\tau_{máx} = \frac{T_1}{c_1 ab^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_1}{0.208(0.040 \text{ m})^3} \qquad T_1 = 532 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

2. Barra con sección transversal rectangular. Ahora se tiene

$$a = 0.064 \text{ m} \qquad b = 0.025 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 2.56$$

Interpolando en la tabla 3.1: $c_1 = 0.259$

$$\tau_{máx} = \frac{T_2}{c_1 ab^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_2}{0.259(0.064 \text{ m})(0.025 \text{ m})^2} \qquad T_2 = 414 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



3. Tubo cuadrado. Para un tubo de espesor t, el esfuerzo cortante está dado por la ecuación (3.53)

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}}$$

donde $\mathcal{A}$ es el área bordeada por la línea central de la sección transversal. Se tiene

$$\mathcal{A} = (0.034 \text{ m})(0.034 \text{ m}) = 1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Se sustituye $\tau = \tau_{perm} = 40$ MPa y $t = 0.006$ m y se despeja el par de torsión permisible:

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_3}{2(0.006 \text{ m})(1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} \qquad T_3 = 555 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.121 Considerando $\tau_{perm} = 70$ MPa y $G = 27$ GPa, para cada una de las barras de aluminio que se muestran en la figura, determine el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse y el ángulo de giro correspondiente en el extremo B.

3.122 Si se sabe que la magnitud del par de torsión **T** es de 200 N · m y que $G = 27$ GPa, determine para cada una de las barras de aluminio mostradas en la figura, el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de giro en el extremo B.

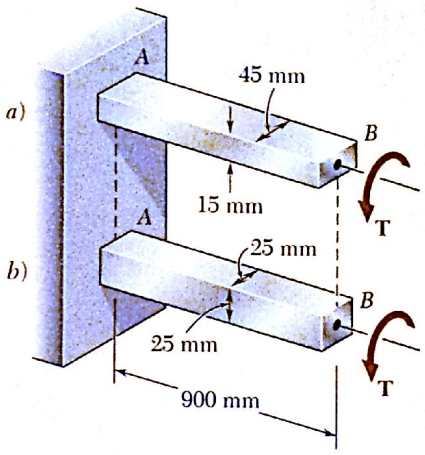


Figura P3.121 y P3.122

3.123 Con $\tau_{perm} = 7.5$ ksi y si se sabe que $G = 5.6 \times 10^6$ psi, para cada una de las barras de latón amarillo laminado en frío, determine el par de torsión **T** máximo que puede aplicarse y el ángulo de giro correspondiente en el extremo B.

3.124 Si se sabe que $T = 7$ kip · in. y que $G = 5.6 \times 10^6$ psi, para cada una de las barras de latón amarillo laminado en frío que se muestran en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de giro en el extremo B.

3.125 El par de torsión **T** causa una rotación de 2° en el extremo B de la barra de acero inoxidable que se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 20$ mm y $G = 75$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

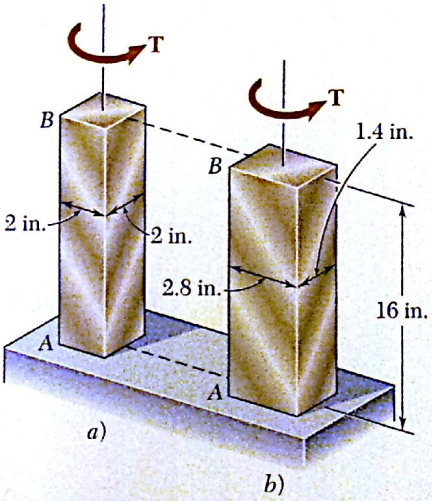


Figura P3.123 y P3.124

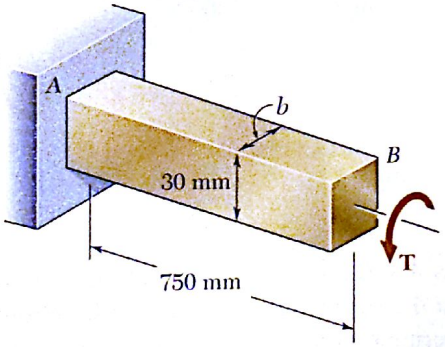


Figura P3.125 y P3.126

3.126 El par de torsión **T** causa una rotación de 0.6° en el extremo B de la barra de acero inoxidable que se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 15$ mm y $G = 26$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

3.127 Determine la máxima sección transversal cuadrada permisible para un eje de acero con 20 ft de longitud si el esfuerzo cortante máximo no debe exceder de 10 ksi cuando el eje se tuerce una revolución completa. Use $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

3.128 Determine la máxima longitud permisible para un eje de acero inoxidable con sección transversal de $\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$ in. si el esfuerzo cortante máximo no debe exceder de 15 ksi cuando el eje se tuerce a través de un ángulo de 15°. Use $G = 11.2 \times 10^6$ psi.

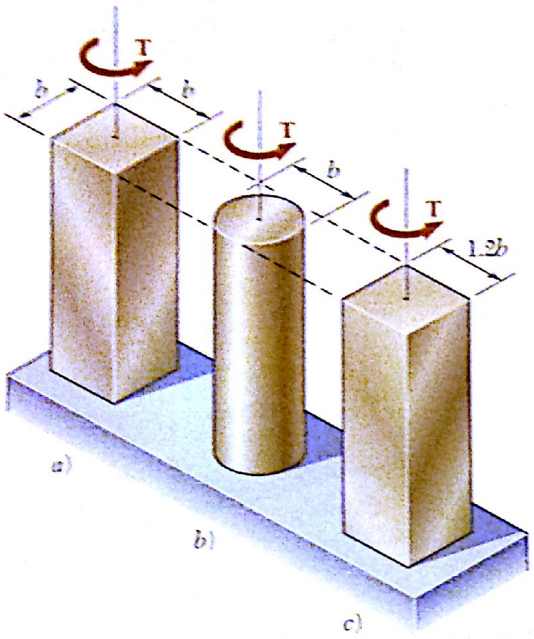


Figura P3.129, P3.130, P3.131 y P3.132

3.129 Cada una de las tres barras de acero que se muestran en la figura están sometidas a un par de torsión con magnitud $T = 275$ N · m. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 50 MPa, determine la dimensión b requerida para cada barra.

3.130 Cada una de las tres barras de aluminio que se muestran en la figura se tuercen a través de un ángulo de 2°. Si se sabe que $b = 30$ mm, $\tau_{perm} = 50$ MPa y $G = 27$ GPa, determine la longitud mínima permisible de cada barra.

3.131 Cada una de las tres barras de acero están sometidas a un par de torsión como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 8 ksi y que $b = 1.4$ in., determine el máximo par de torsión T que puede aplicarse en cada barra.

3.132 Cada una de las tres barras de aluminio que se muestran en la figura se tuercen a través de un ángulo de 1.25°. Si se sabe que $b = 1.5$ in., $\tau = 7.5$ ksi y $G = 3.7 \times 10^6$ psi, determine la longitud mínima permisible para cada barra.

3.133 Los ejes A y B están hechos del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero A tiene una sección transversal circular y B tiene una sección transversal cuadrada. Determine la relación de los pares máximos T_A y T_B que pueden aplicarse con seguridad en A y B, respectivamente.

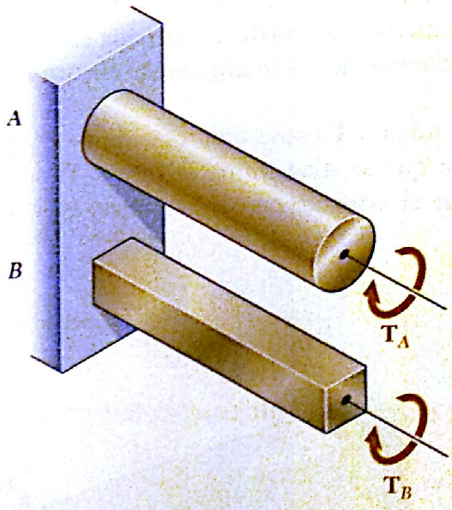


Figura *P3.133 y P3.134*

3.134 Los ejes A y B son del mismo material y tienen la misma área de sección transversal, pero A tiene una sección transversal circular y B una sección transversal cuadrada. Determine la relación de los máximos valores de los ángulos ϕ_A y ϕ_B a través de los cuales pueden torcerse A y B, respectivamente.

3.135 Un par de torsión de 3 000 lb · in. se aplica a un ángulo de acero de 6 ft de longitud con una sección transversal de L4 × 4 × $\frac{3}{8}$. En el apéndice C aparece que el espesor de la sección es de $\frac{3}{8}$ in. y que su área es de 2.86 in.^{2} Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *a-a*, *b*) el ángulo de giro.

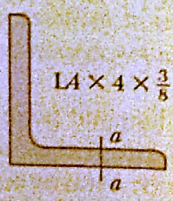


Figura P3.135

3.136 Un ángulo de acero de 3 m de longitud tiene una sección transversal de L203 × 152 × 12.7. En el apéndice C se encuentra que el espesor de la sección es de 12.7 mm con un área de 4 350 mm^2. Si se sabe que $\tau_{perm} = 50$ MPa y que $G = 77.2$ GPa, e ignorando el efecto de las concentraciones de esfuerzos, determine *a*) el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse, *b*) el ángulo de giro correspondiente.

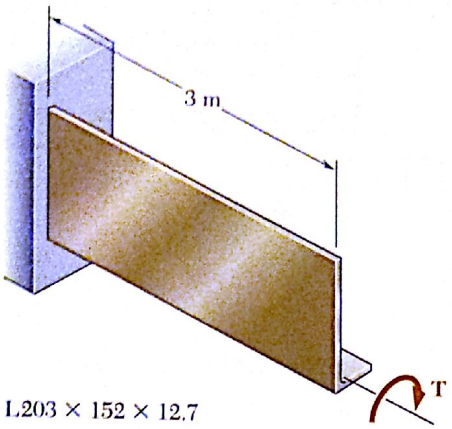


Figura P3.136

3.137 Un elemento de acero de 8 ft de largo con una sección transversal W8 × 31 es sometido a un par de torsión de 5 kip · in. En el apéndice C se encuentran las propiedades del acero laminado. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine *a*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *a-a*, *b*) el máximo esfuerzo cortante a lo largo de la línea *b-b*, *c*) el ángulo de giro. (*Sugerencia*: Considere el alma y las aletas del perfil por separado y obtenga una relación entre los pares de torsión ejercidos sobre el alma y sobre una aleta, respectivamente, expresando que los ángulos de giro resultantes son iguales.)

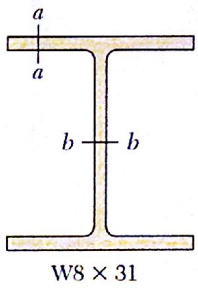


Figura P3.137

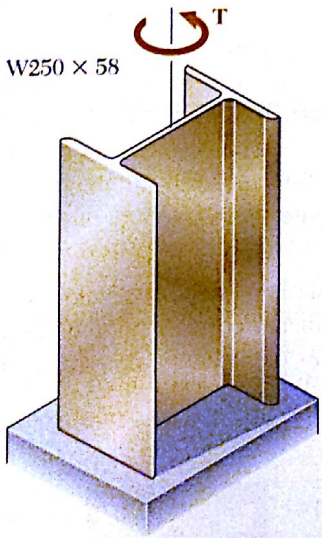


Figura P3.138

3.138 Un elemento de acero de 3 m de largo tiene una sección transversal W250 × 58. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa y que el esfuerzo cortante permisible es de 35 MPa, determine *a*) el máximo par de torsión **T** que puede aplicarse, *b*) el ángulo de giro correspondiente. Consulte el apéndice C para obtener las dimensiones de la sección transversal y desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos. (Vea la sugerencia del problema 3.137.)

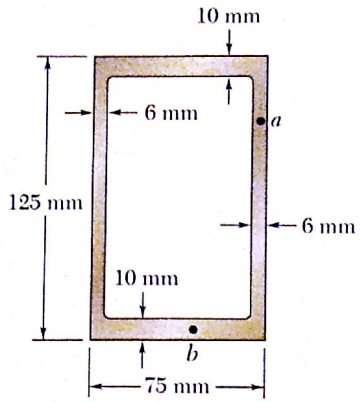


Figura *P3.139*

3.139 Un par de torsión $T = 5$ kN · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos, y determine el esfuerzo cortante en los puntos a y b.

3.140 Un par de torsión $T = 750$ kN · m se aplica al eje hueco mostrado, que tiene un espesor de pared uniforme de 8 mm. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y determine el esfuerzo cortante en los puntos a y b.

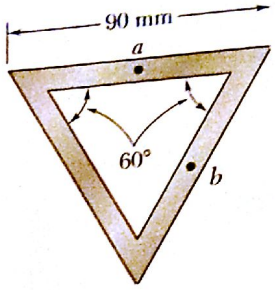


Figura *P3.140*

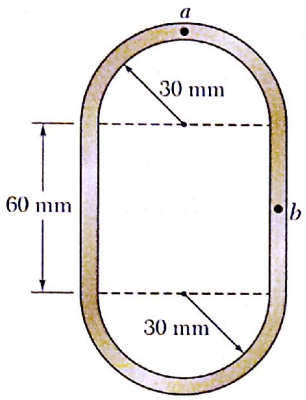


Figura P3.141

3.141 Un par de torsión de 750 N · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura y un espesor de pared uniforme de 6 mm. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y encuentre el esfuerzo cortante en los puntos a y b.

3.142 Un par de torsión de 90 N · m se aplica a un eje hueco que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos y determine el esfuerzo cortante en los puntos a y b.

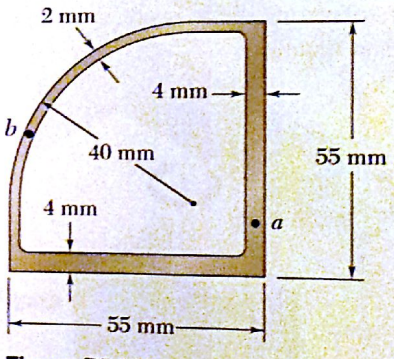


Figura P3.142

3.143 Un eje hueco de latón tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 12 ksi y se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine el par de torsión máximo que puede aplicarse al eje.

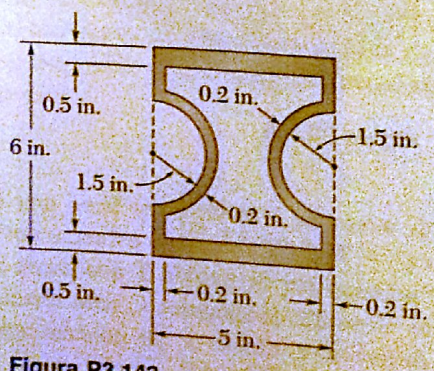


Figura P3.143

3.144 Un elemento hueco con una sección transversal como la que se muestra en la figura está elaborado con lámina metálica de 2 mm de espesor. Si se sabe que el esfuerzo cortante no debe exceder 3 MPa, determine el par par de torsión máximo que puede aplicarse al elemento.

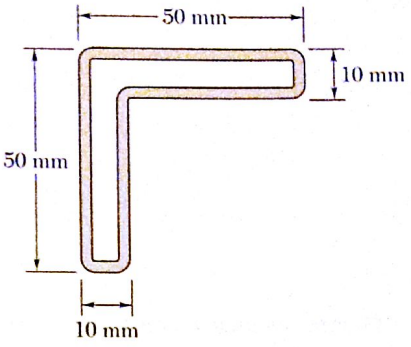


Figura P3.144

3.145 y *3.146* Un elemento hueco con una sección transversal como la que se muestra en la figura está elaborado con lámina metálica de 0.06 in. de grosor. Si se sabe que un par de torsión de 1 250 lb · in. se aplicará al elemento, determine la mínima dimensión d que puede utilizarse si el esfuerzo cortante no debe exceder 750 psi.

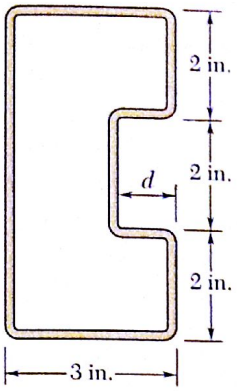


Figura P3.145

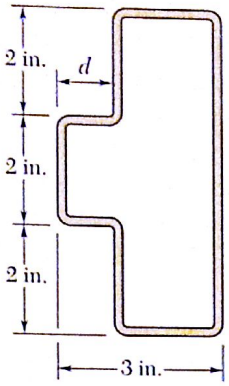


Figura *P3.146*

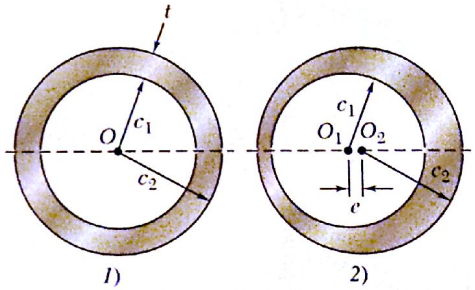


Figura P3.147

3.147 Un eje cilíndrico hueco se diseñó con la sección transversal que se muestra en la figura *1*) para someterlo a un par de torsión máximo T_0. Sin embargo, un defecto de fabricación produjo una pequeña excentricidad e entre las superficies cilíndricas interior y exterior del eje, como lo muestra la figura 2). Exprese el par de torsión máximo T que puede aplicarse con seguridad al eje defectuoso en términos de T_0, e y t. *b*) Calcule la disminución porcentual en el par de torsión permisible para valores de la razón e/t iguales a 0.1, 0.5 y 0.9.

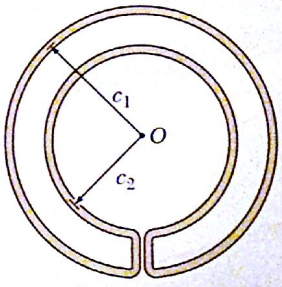


Figura P3.148

3.148 Un tubo de enfriamiento que tiene una sección transversal como la que se muestra en la figura, es de una lámina de acero inoxidable de 3 mm de espesor. Los radios c_1 = 150 mm y c_2 = 100 mm se miden desde la línea central de la hoja de metal. Si se sabe que se aplica un par de torsión de magnitud T = 3 kN · m al tubo, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el tubo, *b*) la magnitud del par de torsión que soporta la coraza circular externa. Desprecie la dimensión de la pequeña apertura donde se conectan las corazas exterior e interior.

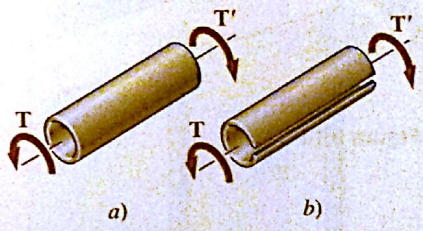


Figura *P3.149*

3.149 Se aplican pares de torsión iguales a tubos de pared delgada que tienen igual longitud L, mismo espesor t y radio c. Se ha ranurado longitudinalmente uno de los tubos, como se indica en la figura. Determine *a*) la relación τ_b/τ_a de los esfuerzos cortantes máximos en los tubos, *b*) la relación ϕ_b/ϕ_a de los ángulos de giro de los ejes.

3.150 Un eje cilíndrico hueco de longitud L, radio medio c_m y espesor uniforme t se somete a pares de torsión de magnitud T. Considere, por una parte, los valores del esfuerzo cortante promedio τ_{prom} y del ángulo de giro ϕ obtenidos de las fórmulas de torsión elástica desarrolladas en las secciones 3.4 y 3.5 y, por otra, los valores correspondientes obtenidos de las fórmulas desarrolladas en la sección 3.13 para ejes huecos de pared delgada. *a*) Muestre que el error relativo introducido al utilizar las fórmulas para ejes de pared delgada en lugar de las fórmulas de torsión elástica es el mismo para τ_{prom} y para ϕ y que el error relativo es positivo y proporcional al cuadrado de la relación t/c_m. *b*) Compare el error porcentual que corresponde a valores de la razón t/c_m de 0.1, 0.2 y 0.4.

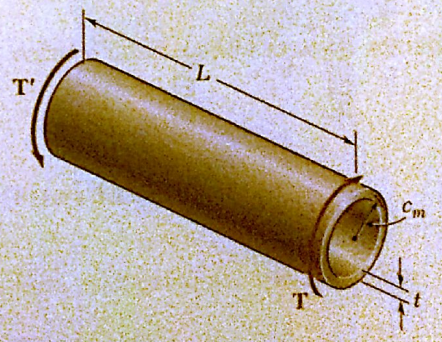


Figura P3.150

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

Este capítulo se dedicó al análisis y diseño de *ejes* sometidos a *pares de torsión*, o momentos torsores. Excepto por las últimas dos secciones del capítulo el estudio se limitó a *ejes circulares*.

Deformaciones en ejes circulares

En un estudio preliminar [véase sección 3.2] se señaló que la distribución de esfuerzos en la sección transversal de un eje circular es *estáticamente indeterminada*. La determinación de estos esfuerzos, por lo tanto, requiere de un análisis previo de las *deformaciones* que ocurren en el eje [véase sección 3.3]. Habiéndose demostrado que en un eje circular sometido a torsión, *toda sección transversal permanece plana y sin distorsión*, se dedujo la siguiente expresión para la *deformación cortante* en un elemento pequeño con lados paralelos y perpendiculares al eje de la flecha y a una distancia ρ del eje:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

donde ϕ es el ángulo de giro para una longitud L del eje (figura 3.14). La ecuación (3.2) muestra que la *deformación a cortante en una flecha circular varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*. Se deduce que la deformación es máxima en la superficie del eje, donde ρ es igual al radio c del eje. Se escribió

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{c\phi}{L} \qquad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.3, 4}$$

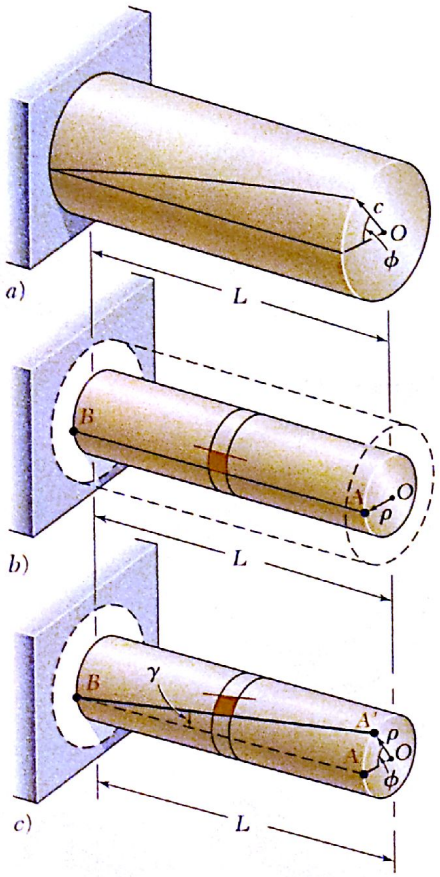


Figura 3.14

Esfuerzos cortantes en el rango elástico

Considerando los *esfuerzos de corte* en un eje circular dentro del rango elástico [véase sección 3.4] y recordando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación a cortante, $\tau = G\gamma$, se dedujo la relación

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\text{máx}} \tag{3.6}$$

que muestra que dentro del rango elástico, el *esfuerzo cortante τ en una flecha circular también varía linealmente con la distancia desde el eje de la flecha*. Igualando la suma de momentos de las fuerzas elementales ejercidas en cualquier sección del eje a la magnitud T del par de torsión aplicado al eje, se dedujeron las *fórmulas para la torsión elástica*

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \qquad \tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3.9, 10}$$

donde c es el radio de la sección transversal y J su momento centroidal polar de inercia. Se advirtió que $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ para un eje sólido y $J = \frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4)$ para un eje hueco de radio interior c_1 y radio exterior c_2.

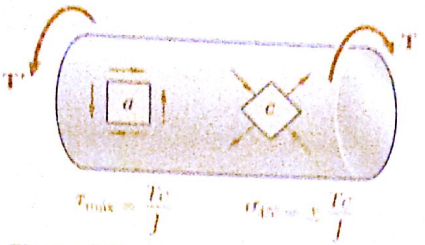


Figura 3.20

Se observó que mientras el elemento *a* de la figura 3.20 está en cortante puro, el elemento *c* en la misma figura está sujeto a esfuerzos normales de la misma magnitud, Tc/J, siendo dos de los esfuerzos normales a tensión y dos a compresión. Esto explica por qué en un ensayo de torsión los materiales dúctiles, que generalmente fallan por corte, se romperán a lo largo de un plano perpendicular al eje del espécimen, mientras que los materiales frágiles, que son más débiles a tensión que a cortante, se rompen a lo largo de superficies que forman un ángulo de 45° con ese eje.

En la sección 3.5 se encontró que dentro del rango elástico, el ángulo de giro ϕ de un eje circular es proporcional al par de torsión T aplicado a él (figura 3.22). Expresando ϕ en *radianes*, se escribe

$$\phi = \frac{TL}{JG} \tag{3.16}$$

donde L = longitud del eje
J = momento polar de inercia de la sección transversal
G = módulo de rigidez del material

Si el eje se somete a pares de torsión en lugares distintos a sus extremos o consta de varias partes de distintas secciones transversales y posiblemente de diferentes materiales, el ángulo de giro del eje debe expresarse como la *suma algebraica* de los ángulos de giro de sus partes componentes (véase problema muestra 3.3):

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{3.17}$$

Se observó que cuando ambos extremos de un eje *BE* giran (figura 3.26*b*), el ángulo de giro del eje es igual a la *diferencia* entre los ángulos de rotación ϕ_B y ϕ_E de sus extremos. También se señaló que cuando dos ejes, *AD* y *BE*, se conectan por engranes *A* y *B*, los pares aplicados, respectivamente, por el engrane *A* sobre el eje *AD* y por el engrane *B* sobre el eje *BE* son *directamente proporcionales* a los radios r_A y r_B de los dos engranes, ya que las fuerzas aplicadas sobre ellos por los dientes en *C* son iguales y opuestas. Por otro lado, los ángulos ϕ_A y ϕ_B alrededor de los cuales giran los dos ejes son *inversamente proporcionales* a r_A y r_B, ya que los arcos *CC'* y *CC"*, descritos por los dientes, son iguales [véase ejemplo 3.04 y problema modelo 3.4].

Si las reacciones en los soportes de un eje o los pares internos no pueden determinarse usando sólo la estática, se dice que el eje es *estáticamente indeterminado* [véase sección 3.6]. Las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre deben complementarse con las relaciones que incluyan las deformaciones del eje que se obtuvieron, a su vez, de la geometría del problema [véase ejemplo 3.05 y problema modelo 3.5].

Ángulo de giro

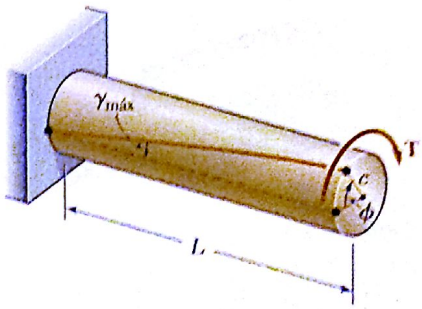
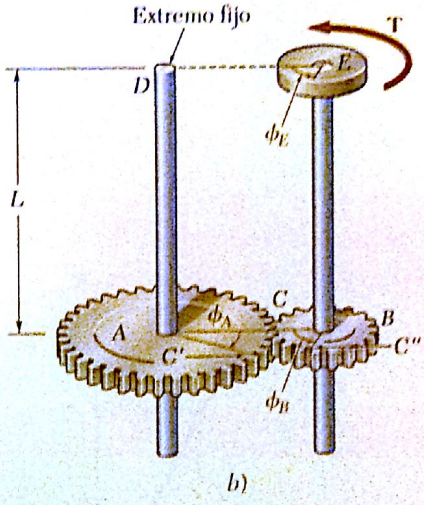


Figura 3.22



b)

Figura 3.26*b*

Ejes estáticamente indeterminados

Ejes de transmisión

En la sección 3.7 se explicó el *diseño de ejes de transmisión*. Primero se observó que la potencia P transmitida por un eje es

$$P = 2\pi fT \tag{3.20}$$

donde T es el torque ejercido en cada extremo del eje y f es la *frecuencia* o velocidad de rotación del eje. La unidad de frecuencia es la revolución por segundo (s^{-1}) o *hertz* (Hz). Si se emplean unidades SI, T se expresa en newtons-metro (N · m) y P en *watts* (W). Si se emplean unidades acostumbradas en Estados Unidos, T se expresa en lb · ft o lb · in., y P en ft · lb/s o in. · lb/s; la potencia puede convertirse entonces a *caballos de fuerza* (hp) a través del uso de la relación

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 6\,600 \text{ in.} \cdot \text{lb/s}$$

Para diseñar un eje para transmitir una potencia dada P a una frecuencia f, primero debe obtenerse T de la ecuación (3.20). Llevando este valor y el valor máximo permisible de τ para el material utilizado a la fórmula elástica (3.9), se obtendrá el valor correspondiente del parámetro J/c, del que puede calcularse el diámetro requerido del eje [ejemplos 3.06 y 3.07].

Concentraciones de esfuerzos

En la sección 3.8 se analizan las *concentraciones de esfuerzos* en ejes circulares. Se vio que la concentración de esfuerzos resultante de un cambio abrupto en el diámetro de un eje puede reducirse gracias al uso de un *filete* (figura 3.31). El valor del esfuerzo cortante máximo en el filete es de

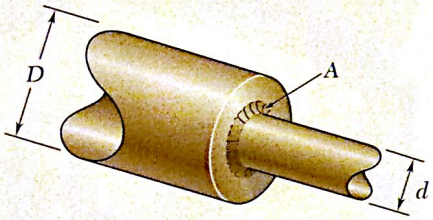


Figura 3.31

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

donde el esfuerzo Tc/J se calcula para el eje de menor diámetro, y donde K es un factor de concentración de esfuerzos. Los valores de K se graficaron en la figura 3.32 en la página 167 contra la razón r/d, donde r es el radio del filete, para varios valores de D/d.

Deformaciones plásticas

Las secciones 3.9 a 3.11 tratan sobre el análisis de las *deformaciones plásticas* y de los *esfuerzos residuales* en ejes circulares. Primero se recordó que aun cuando no se aplique la ley de Hooke, la distribución de *deformaciones* en un eje circular es siempre lineal [véase sección 3.9]. Si el diagrama esfuerzo-deformación a cortante para el material se conoce, entonces es posible graficar el esfuerzo cortante τ contra la distancia ρ desde el eje de la flecha para cualquier valor dado de $\tau_{\text{máx}}$ (figura 3.35).

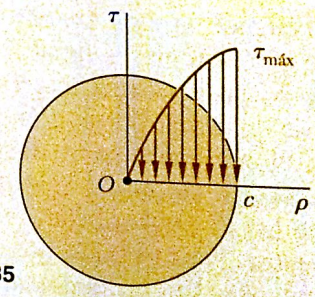


Figura 3.35

Sumando las contribuciones al par de torsión de elementos anulares de radio ρ y espesor $d\rho$, se expresó el par T como

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi\int_0^c \rho^2\tau\, d\rho \tag{3.26}$$

donde τ es la función de ρ graficada en la figura 3.35.

Un valor importante del par de torsión es el par último T_U que causa la falla del eje. Este valor puede determinarse, de manera experimental o mediante los cálculos indicados antes, igualando $\tau_{máx}$ al esfuerzo cortante último del material τ_U. Teniendo T_U y suponiendo una distribución lineal de esfuerzos (figura 3.36) se determina el esfuerzo ficticio correspondiente $R_T = T_U c/J$, conocido como el *módulo de ruptura a torsión* del material dado.

Módulo de ruptura

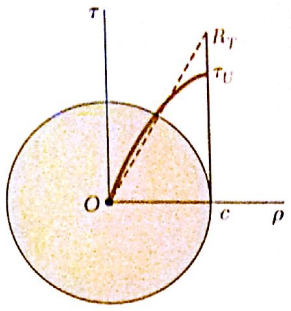


Figura 3.36

Considerando el caso idealizado de un *eje sólido circular* hecho de un *material elastoplástico* [véase sección 3.10], primero se señaló que, mientras $\tau_{máx}$ no exceda la resistencia de cedencia τ_Y del material, la distribución de esfuerzos a través de una sección del eje es lineal (figura 3.38*a*). El par de torsión T_Y correspondiente a $\tau_{máx} = \tau_Y$ (figura 3.38*b*) se conoce como el *máximo par de torsión elástico*. Para un eje circular sólido con radio c, se tiene

Eje sólido de material elastoplástico

$$T_Y = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_Y \tag{3.29}$$

Al aumentar el par, se desarrolla una región plástica en el eje alrededor de un núcleo elástico de radio ρ_Y. El par T que corresponde a un valor dado de ρ_Y es

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_Y^3}{c^3}\right) \tag{3.32}$$

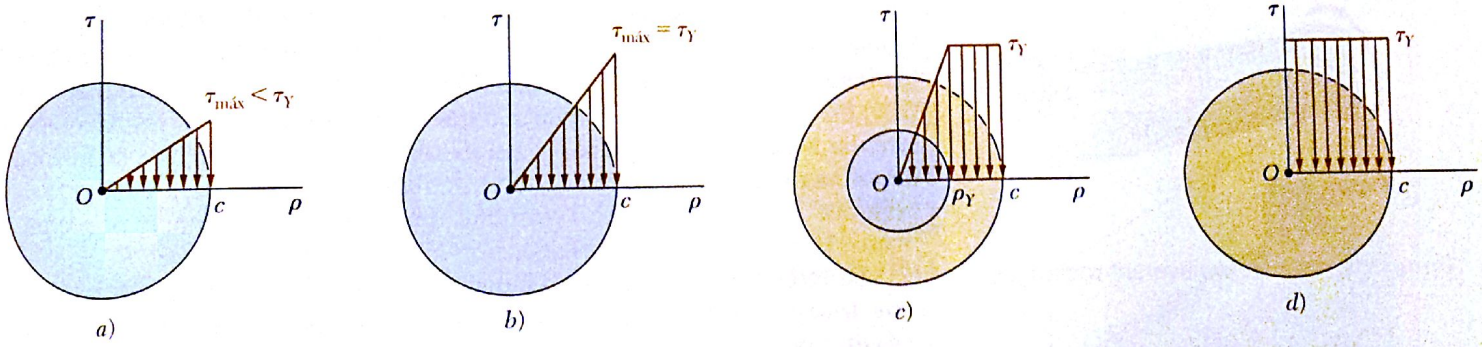


Figura 3.38

Se observó que cuando ρ_Y se aproxima a cero, el par se aproxima a un valor limitante T_p, llamado *par de torsión plástico* del eje considerado:

$$T_p = \frac{4}{3} T_Y \tag{3.33}$$

Graficando el par T contra el ángulo de giro ϕ de un eje circular sólido (figura 3.39), se obtuvo el segmento de recta $0Y$ definido por la ecuación (3.16), seguido por una curva que se aproxima a la línea recta $T = T_p$, definida por la ecuación

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right) \tag{3.37}$$

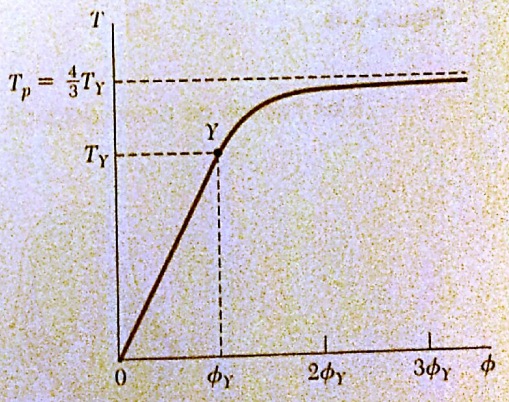


Figura 3.39

Deformación permanente. Esfuerzos residuales

Cargar un eje circular más allá del inicio de la cedencia y descargarlo [véase sección 3.11] resulta en una *deformación permanente* caracterizada por el ángulo de giro $\phi_p = \phi - \phi'$, donde ϕ corresponde a la fase de carga descrita en el párrafo previo, y ϕ' a la fase de descarga representada por una línea recta en la figura 3.42. También existirán *esfuerzos residuales* en el eje, que se determinan sumando los esfuerzos máximos alcanzados durante la fase de carga y los esfuerzos inversos correspondientes a la fase de descarga [véase ejemplo 3.09].

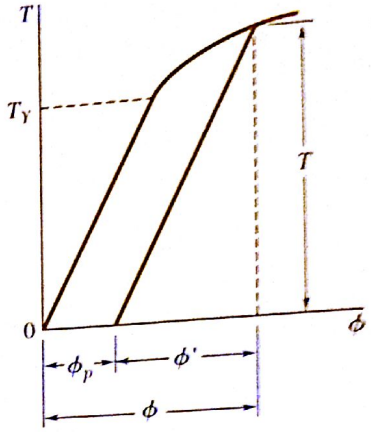


Figura 3.42

Torsión en elementos no circulares

Las últimas dos secciones del capítulo trataron de la torsión de *elementos no circulares*. Primero se recordó que la deducción de las fórmulas para la distribución de deformación y de esfuerzo en ejes circulares se basó en que, debido a la simetría axial de estos elementos, las secciones circulares permanecen planas y sin distorsión. Puesto que esta propiedad no se mantiene para elementos no circulares, como la barra cuadrada de la figura 3.45, ninguna de las fórmulas deducidas anteriormente puede utilizarse para su análisis [véase sección 3.12].

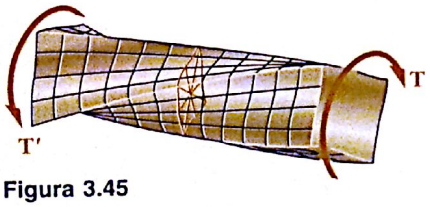


Figura 3.45

Barras de sección transversal rectangular

Se indicó en la sección 3.12 que en el caso de barras rectas con *sección transversal rectangular uniforme* (figura 3.48), el esfuerzo cortante máximo ocurre a lo largo de la línea central de la cara *más ancha* de la barra. Se dieron sin demostración las fórmulas para el esfuerzo cortante máximo y para el ángulo de giro. También se analizó la *analogía de la membrana* para visualizar la distribución de esfuerzos en un elemento no circular.

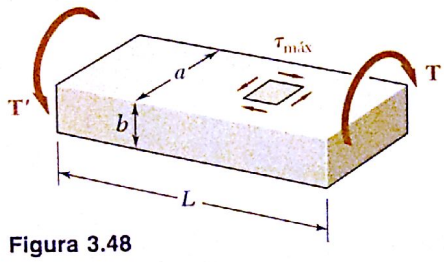


Figura 3.48

Ejes huecos de pared delgada

A continuación se estudió la distribución de esfuerzos en *ejes huecos no circulares de pared delgada* [véase sección 3.13]. Se vio que el esfuerzo cortante es paralelo a la superficie de la pared y que varía tanto a través de la pared como a lo largo de la sección transversal de la pared. Denotando con τ el valor promedio del esfuerzo cortante calculado a través de la pared en un punto dado de la sección transversal, y con t el espesor de la pared en ese punto (figura 3.57), se mostró que el producto $q = \tau t$, llamado *flujo de corte*, es constante a lo largo de la sección transversal.

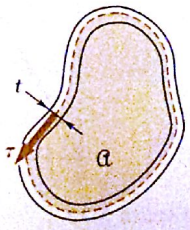


Figura 3.57

Además, denotando por T el par de torsión aplicado al eje hueco y por $\mathcal{A}$ el área bordeada por la línea central de la sección transversal de la pared, se expresó de la siguiente manera el esfuerzo cortante promedio τ en cualquier punto dado de la sección transversal:

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \tag{3.53}$$

PROBLEMAS DE REPASO

3.151 Si se sabe que un agujero de 0.40 in. de diámetro ha sido perforado en los ejes *AB*, *BC* y *CD*, determine *a*) el eje en el que ocurre el máximo esfuerzo cortante, *b*) la magnitud de tal esfuerzo.

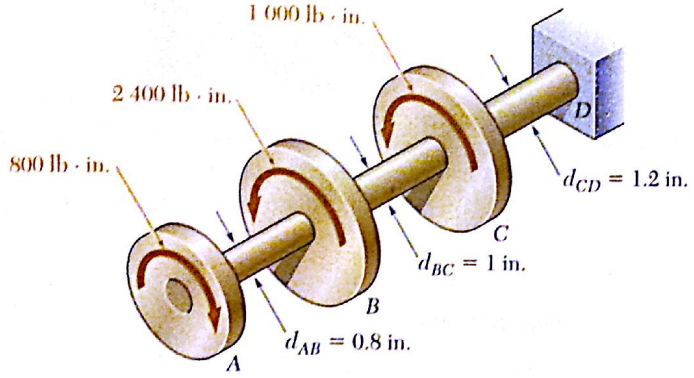


Figura P3.151

3.152 Un tubo de acero de 12 in. de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de $\frac{1}{4}$ in. de grosor, la cual se suelda a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 45° con el plano perpendicular al eje del tubo. Si se sabe que el esfuerzo de tensión máximo permisible en la soldadura es de 12 ksi, determine el mayor par de torsión que puede aplicarse al tubo.

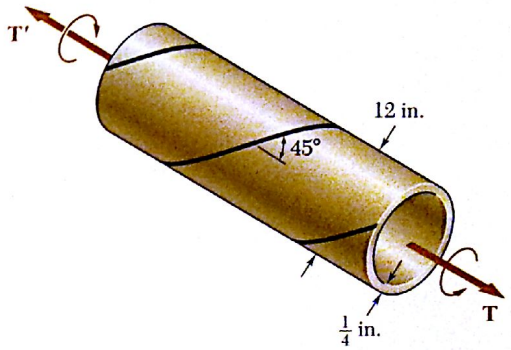


Figura *P3.152*

3.153 Para el eje de aluminio mostrado (G = 27 GPa), determine *a*) el par de torsión **T** que causa un ángulo de giro de 4°, *b*) el ángulo de giro causado por el mismo par par de torsión **T** en un eje cilíndrico sólido con la misma longitud y área de sección transversal.

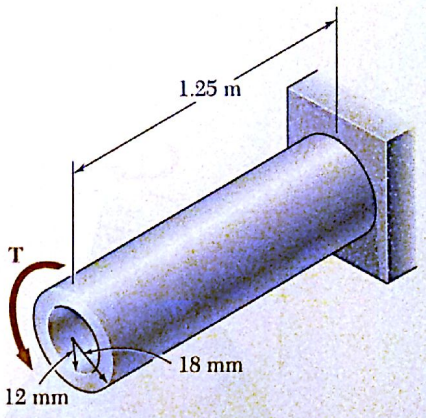


Figura P3.153

3.154 La varilla cilíndrica sólida *BC* está unida a la palanca rígida *AB* y al soporte fijo en *C*. La fuerza vertical **P** aplicada en *A* causa un pequeño desplazamiento en el punto *A*. Demuestre que el esfuerzo cortante máximo correspondiente en la varilla es

$$\tau = \frac{Gd}{2La}\Delta$$

donde d es el diámetro de la varilla y G su módulo de rigidez.

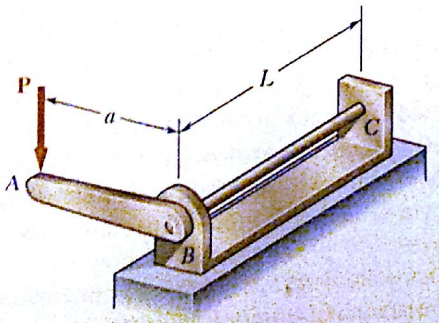


Figura P3.154

3.155 Dos ejes sólidos de acero ($G = 77.2$ GPa) están conectados a un disco de acoplamiento B y a soportes fijos en A y C. Para las cargas que se muestran, determine *a*) la reacción en cada soporte, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el eje AB, *c*) el esfuerzo cortante máximo en el eje BC.

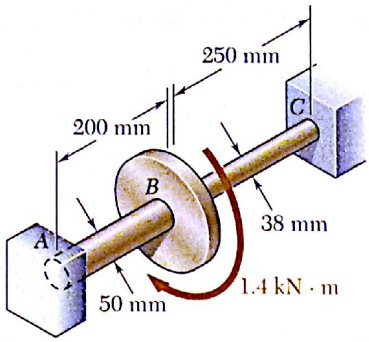


Figura *P3.155*

3.156 El eje compuesto que se muestra en la figura se tuerce al aplicarle un par de torsión **T** en el extremo A. Si se sabe que el esfuerzo cortante máximo en la camisa de acero es de 150 MPa, determine el esfuerzo cortante máximo correspondiente en el núcleo de aluminio. Utilice $G = 77.2$ GPa para el acero y $G = 27$ GPa para el aluminio.

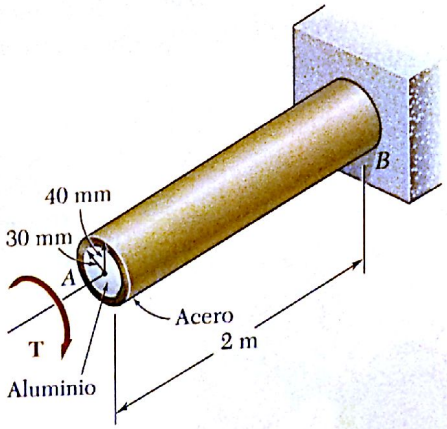


Figura P3.156

3.157 En el diseño del sistema de engranes y ejes que se muestra en la figura, los diámetros de los ejes son $d_{AB} = 2$ in. y $d_{CD} = 1.5$ in. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine el ángulo en el cual gira el extremo D del eje CD.

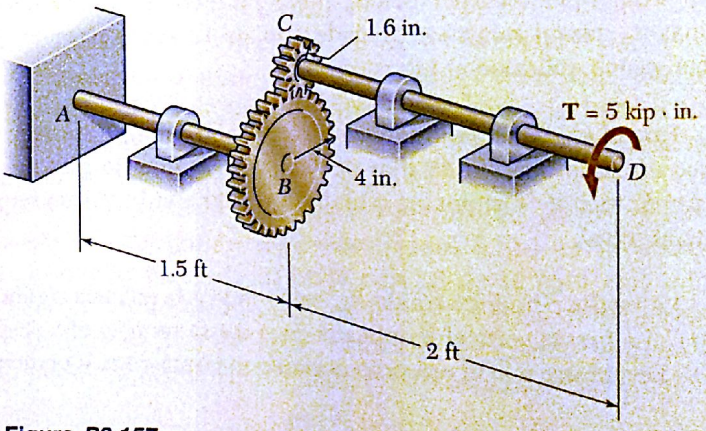


Figura *P3.157*

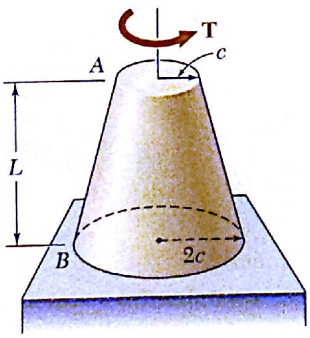


Figura P3.158

3.158 Un par de torsión **T** se aplica como se muestra en la figura a un eje sólido ahusado AB. Muestre, por integración, que el ángulo de giro de A es

$$\phi = \frac{7TL}{12\pi Gc^4}$$

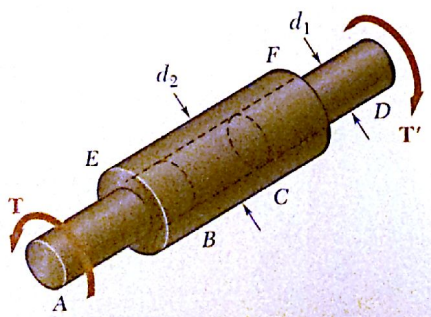


Figura P3.160

3.159 Un eje de acero de 1.5 in. de diámetro con una longitud de 4 ft se utilizará para transmitir 60 hp entre un motor y una bomba. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine la mínima velocidad de rotación a la que el esfuerzo cortante no excederá 8 500 psi y a la que el ángulo de giro no excederá 2°.

3.160 Dos varillas sólidas de latón AB y CD se sueldan a un manguito de latón EF. Determine la relación d_2/d_1 para la cual ocurre el mismo esfuerzo cortante máximo en las varillas y en el manguito.

3.161 Uno de los dos ejes huecos de transmisión de un trasatlántico mide 75 m de largo y tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que $G = 77.2$ GPa y que el eje transmite 44 MW a su hélice cuando gira a 144 rpm, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en el eje y *b*) el ángulo de giro correspondiente del eje.

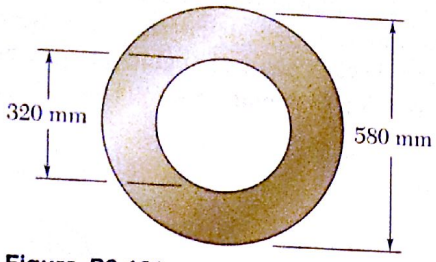


Figura *P3.161*

3.162 Dos ejes son del mismo material. La sección transversal del eje A es cuadrada con un lado b y la del eje B es un círculo con diámetro b. Si se sabe que los ejes están sometidos al mismo par de torsión, determine la relación τ_A/τ_B de los esfuerzos cortantes máximos que ocurren en los ejes.

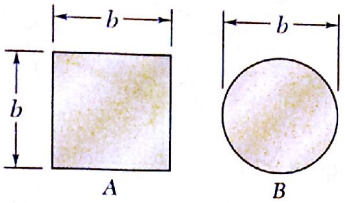


Figura P3.162

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas se diseñaron para ser resueltos con una computadora. Escriba cada programa para que pueda utilizarse con unidades del SI o con las unidades del sistema inglés.

3.C1 El eje AB consta de n elementos cilíndricos homogéneos, los cuales pueden ser sólidos o huecos. Su extremo A está fijo, mientras que su extremo B es libre y está sometido a la carga que se muestra en la figura. La longitud del elemento i se denota por L_i, su diámetro exterior mediante OD_i, su diámetro interior con ID_i, su módulo de rigidez por G_i, y el par de torsión aplicado a su extremo derecho por $\mathbf{T}_i$, siendo su magnitud T_i supuesta positiva si $\mathbf{T}_i$ se observa antihoraria desde el extremo B y negativa si es de otro modo. (Advierta que $ID_i = 0$ si el elemento es sólido.) *a*) Escriba un programa para computadora que pueda utilizarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en cada elemento, el ángulo de giro en cada elemento y el ángulo de giro del eje completo. *b*) Use este programa para resolver los problemas 3.35 y 3.38.

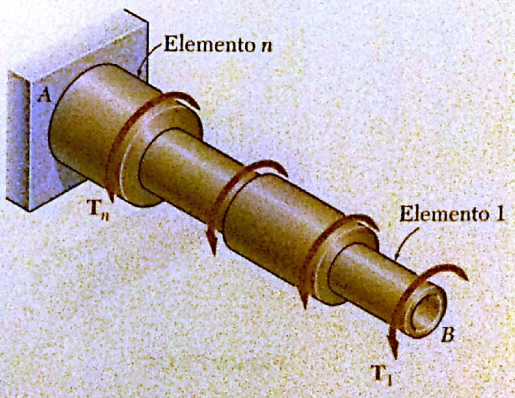


Figura P3.C1